а емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Рассмотренный пример позволяет решить более сложную задачу определения емкости провода, расположенного над проводящей плоскостью. Пусть над бесконечной плоскостью на расстоянии l от нее находится бесконечно длинный провод радиуса ρ, на котором распределен заряд с плотностью $\varkappa$ (заряд на единицу длины). Ясно, что и эта задача может решаться как двумерная.

III. Основная задача электроразведки

Для изучения неоднородности земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянным током заключается в следующем. При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряются напряжения созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи наблюдений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) базируются на математическом решении соответствующих задач.

Потенциал поля постоянного тока в однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

которое означает, что вертикальная составляющая плотности тока[1]) на («дневной») поверхности $z = 0$ равна нулю, так как полупространство $z < 0$ (воздух) непроводящее.

Рассмотрим точечный электрод на границе полупространства в точке A. Очевидно, что потенциал поля будет равен

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

где R — расстояние от источника A, ρ — удельное сопротивление среды, а I — сила тока. Эта функция отличается от функции источника в неограниченном пространстве коэффициентом 2 в силу условия (2).

---

[1]) См. стр. 278.

Измеряя разность потенциалов в точках M и N, лежащих на одной прямой с A, при помощи измерительной цепи, получим:

$$V(M)-V(N)=\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r,$$

где Δr — расстояние между точками N и M.

Предполагая, что точки M и N достаточно близки между собой, получим:

$$\frac{V(M)-V(N)}{\Delta r}\cong\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\cong\frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

где r — расстояние точки O (центра приемной цепи MN) от питающего электрода. Сила тока I в питающей цепи известна, так как регистрируется в течение хода работы. Отсюда для сопротивления однородного полупространства получим:

$$\rho=\frac{2\pi r^2}{I}\cdot\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|. \tag{4}$$

Если среда неоднородна, то величину ρ, определяемую по формуле (4), называют кажущимся сопротивлением и обозначают через ρ_k; ρ_k не будет постоянной величиной.

Рассмотрим задачу о вертикальном электрическом зондировании, когда слои земной коры залегают горизонтально и сопротивление их зависит только от глубины

$$\rho=\rho(z).$$

В этом случае кажущееся сопротивление будет функцией расстояния $r=AO$. Задача интерпретации результатов вертикальных электрических зондирований заключается в определении функции $\rho(z)$, дающей «электрический разрез» среды по известным значениям $\rho_k(r)$.

Рассмотрим подробнее задачу о двуслойной среде, когда однородный слой мощности l и сопротивления ρ_0 лежит на однородной среде с сопротивлением ρ_1,

$$\rho(z)=\begin{cases}\rho_0 & \text{при} \quad 0\leqslant z<l,\\ \rho_1 & \text{при} \quad l<z.\end{cases}$$

Очевидно, что на небольших расстояниях $r\ll l$ кажущееся сопротивление ρ_k равно ρ_0, так как влияние подстилающей среды будет сказываться мало. Для больших расстояний $(r\gg l)$ ρ_k будет равно ρ_1.

Задача сводится, таким образом, к нахождению решения уравнения Лапласа V_0 в слое $0<z<l$ и V_1 в полупространстве $z>l$. При $z=l$ должны выполняться условия непрерывности потенциала

$$V_0|_{z=l}=V_1|_{z=l} \tag{5}$$

и непрерывности нормальных составляющих плотности тока

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\bigg|_{z=l}=\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\bigg|_{z=l}. \tag{6}$$

При $z=0$ потенциал V_0 должен удовлетворять условию (2), а в точке A, которую мы выберем за начало цилиндрических координат (r, φ, z), потенциал V_0 должен иметь особенность типа (3)

$$V_0=\frac{\rho_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}+v_0, \tag{7}$$

где v_0 — ограниченная функция.

Функция V_1 должна быть ограниченной на бесконечности. Функции v_0 и V_1 удовлетворяют уравнению (1), которое в силу цилиндрической симметрии задачи приобретает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Метод разделения переменных дает для V два типа решений, ограниченных при $r=0$:

$$e^{\pm\lambda z}J_0(\lambda r),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, ч. I, § 1), а λ — параметр разделения. Будем искать решение в виде

$$V_0(r, z)=\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\int_0^\infty (A_0e^{-\lambda z}+B_0e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

$$V_1(r, z)=\int_0^\infty (A_1e^{-\lambda z}+B_1e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda,$$

где A_0, B_0, A_1, B_1 — некоторые постоянные. Условие (2) дает связь между A_0 и B_0. Вычислим

$$\frac{\partial V_0}{\partial z}=-\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}+\int_0^\infty (-\lambda A_0e^{-\lambda z}+\lambda B_0e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

Условие (2) принимает вид

$$\int_0^\infty (B_0-A_0)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda=0$$

при произвольном r, откуда

$$B_0=A_0.$$

Из условия ограниченности V_1 при $z \to \infty$ следует, что

$$B_1 = 0.$$

Таким образом,

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty A_1 e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda$$

и

$$V_0(r, z) = \int_0^\infty [q e^{-\lambda z} + A_0 (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})]\, J_0(\lambda r)\, d\lambda;$$

при этом мы воспользовались формулой

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda \tag{8}$$

(см. Дополнение II, ч. I, § 5) и обозначили $\frac{\rho_0 I}{2\pi} = q$.

Оставшиеся постоянные A_0 и A_1 определяются из условий (5) и (6) для $z = l$, которые сводятся к системе алгебраических уравнений:

$$A_0(e^{-2\lambda l} + 1) - A_1 e^{-2\lambda l} = -q e^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0} A_0 (e^{-2\lambda l} - 1) - \frac{1}{\rho_1} A_1 e^{-2\lambda l} = -\frac{q}{\rho_0} e^{-2\lambda l},$$

откуда находится коэффициент

$$A_0 = q \frac{(\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}}{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)\, e^{-2\lambda l}},$$

и решение V_0 для верхнего слоя дается формулой

$$V_0(r, z) = \frac{I \rho_0}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda z}) \right] J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{9}$$

где положено

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

Преобразуем полученное выражение. Так как $|k| < 1$, то можно записать:

$$\frac{k e^{-2\lambda l}}{1 - k e^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

и

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2nl+z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{I\rho_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2nl-z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \quad (9')$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (8), получим:

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-2nl)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+2nl)^2}}\right). \quad (10)$$

Это выражение для решения (9) может быть сразу написано, если решать задачу методом отражений. Полагая $z = 0$, получаем распределение потенциала на поверхности земли

$$V_0(r, 0) = \frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{\sqrt{r^2+(2nl)^2}}\right], \quad (11)$$

откуда

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right],$$

и для ρ_k по формуле (4) имеем:

$$\rho_k = \rho_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n r^3}{[r^2+(2nl)^2]^{3/2}}\right] = \rho_0\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n\left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + n^2\right]^{3/2}}\right] = \rho_0 f(\xi), \quad (12)$$

где $\xi = r/l$, $f(\xi)$ обозначает выражение в квадратных скобках. При $r \ll l$ имеем

$$\rho_k \cong \rho_0.$$

Чтобы оценить поведение ρ_k при больших r, устремим в формуле (12) $r \to \infty\ (\xi \to \infty)$. Предел n-го члена суммы будет равен k^n, откуда следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\rho_k = \rho_0\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} k^n\right) = \rho_0\left(1 + \frac{2k}{1-k}\right) = \rho_0\frac{1+k}{1-k} = \rho_0\frac{\rho_1+\rho_0+(\rho_1-\rho_0)}{\rho_1+\rho_0-(\rho_1-\rho_0)} = \rho_1.$$

Сравнивая экспериментальную кривую с кривой, определяемой формулой (12), мы можем определить ρ_0 по значениям ρ_k при малых значениях r, ρ_1 по значениям ρ_k при больших значениях r. Мощность верхнего проводящего слоя l определяется подбором. Она равна тому значению l, при котором эмпирическая кривая как функция $\rho(\xi) = \rho(r/l)$ наиболее близко совпадает с кривой, вычисляемой по формуле (12). На технике подбора, производимого с помощью билогарифмических масштабов, мы не будем останавливаться[1]).

В случае многослойных разрезов кривые для ρ_k вычисляются аналогично. Характер электрического разреза среды определяется при помощи подбора теоретической кривой, наиболее близко совпадающей с эмпирической. При увеличении числа слоев техника интерпретации весьма осложняется, так как число вспомогательных теоретических кривых сильно растет.

Отметим, что при различных электрических разрезах $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$ соответствующие кажущиеся сопротивления также различны

$$\rho_k^{(1)}(r) \neq \rho_k^{(2)}(r);$$

следовательно, задача об определении электрического разреза по кажущемуся сопротивлению с математической точки зрения имеет единственное решение[2]).

Задачи, аналогичные рассмотренной задаче электроразведки, встречаются в различных областях физики и техники.

С электростатическими задачами мы встречаемся при конструировании различных электронных приборов, с тепловыми и гидродинамическими — во многих областях техники (теплоотдача зданиями, фильтрация воды под плотиной и т. д.)[3]).

Задачи определения магнитного поля в неоднородной среде встречаются, например, в магнитной дефектоскопии. Для определения дефекта в детали, например наличия пустот под поверхностью, металлическую деталь помещают между полюсами магнита и измеряют магнитное поле на поверхности детали. По возмущению магнитного поля требуется определить наличие дефекта, а также, если возможно, размеры дефекта, глубину его залегания и т. д.

Для решения задач используются методы моделирования, основанные на подобии потенциальных полей различной физической природы[4]).

---

[1]) См., например, прекрасную книгу А. И. Заборовского «Электроразведка», 1943.

[2]) А. Н. Тихонов, О единственности решения задачи электроразведки, ДАН **69**, № 6, 797 (1949).

[3]) Н. Н. Павловский, Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, 1922, гл. XIV.

[4]) А. В. Лукьянов, Об электролитическом моделировании пространственных задач, ДАН **75**, № 5 (1950).

В самом деле, рассмотрим потенциальные поля в неоднородных средах различной физической природы (например, стационарное поле температур, магнитное поле в неоднородной среде, электростатическое поле, поле скоростей жидкости при фильтрации). Потенциальные функции этих полей $u(x, y, z)$ в каждой однородной области удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. На границе областей G_1 и G_2 с различными коэффициентами теплопроводности, магнитной проницаемости и т. д. выполняется условие

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

где k_1 и k_2 — соответствующие физические постоянные.

Пусть на границах равных геометрических областей заданы численно равные значения потенциалов или их нормальных производных различных физических полей. Предположим, что физические неоднородности этих областей геометрически равны и одинаково расположены; отношения физических постоянных (теплопроводностей, магнитных проницаемостей и т. д.) любой пары соответственных неоднородностей тоже равны. Тогда численные значения потенциалов этих полей во внутренних соответственных точках также равны, так как являются решением одной и той же математической задачи, имеющей единственное решение.

IV. Определение векторных полей

Наряду со скалярными задачами во многих вопросах электродинамики и гидродинамики часто встречаются задачи об определении векторного поля по заданным ротору и дивергенции этого поля.

Докажем, что векторное поле $\boldsymbol{A}$ однозначно определено внутри некоторой области G, ограниченной замкнутой поверхностью S, если заданы ротор и дивергенция поля внутри G:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C, \tag{2}$$

а на границе S задана нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{A}$.

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

Отметим, что функции $\boldsymbol{B}$, C и f не могут быть заданы произвольно. Должны выполняться соотношения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\iint_S f(M)\,dS = \iiint_G C\,d\tau. \tag{5}$$