В самом деле, рассмотрим потенциальные поля в неоднородных средах различной физической природы (например, стационарное поле температур, магнитное поле в неоднородной среде, электростатическое поле, поле скоростей жидкости при фильтрации). Потенциальные функции этих полей $u(x, y, z)$ в каждой однородной области удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. На границе областей G_1 и G_2 с различными коэффициентами теплопроводности, магнитной проницаемости и т. д. выполняется условие

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

где k_1 и k_2 — соответствующие физические постоянные.

Пусть на границах равных геометрических областей заданы численно равные значения потенциалов или их нормальных производных различных физических полей. Предположим, что физические неоднородности этих областей геометрически равны и одинаково расположены; отношения физических постоянных (теплопроводностей, магнитных проницаемостей и т. д.) любой пары соответственных неоднородностей тоже равны. Тогда численные значения потенциалов этих полей во внутренних соответственных точках также равны, так как являются решением одной и той же математической задачи, имеющей единственное решение.

IV. Определение векторных полей

Наряду со скалярными задачами во многих вопросах электродинамики и гидродинамики часто встречаются задачи об определении векторного поля по заданным ротору и дивергенции этого поля.

Докажем, что векторное поле A однозначно определено внутри некоторой области G, ограниченной замкнутой поверхностью S, если заданы ротор и дивергенция поля внутри G:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = C, \tag{2}$$

а на границе S задана нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{A}$.

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

Отметим, что функции $\boldsymbol{B}$, C и f не могут быть заданы произвольно. Должны выполняться соотношения

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

$$\iint_S f(M)\, dS = \iiint_G C\, d\tau. \tag{5}$$

Функцию f будем считать непрерывной на поверхности S, функции $\boldsymbol{B}$ и C — непрерывными в G вместе со своими производными и поверхность S — такой, что для нее разрешима вторая внутренняя краевая задача при непрерывных граничных значениях.

Поставленную задачу будем решать в несколько этапов. Найдем вектор $\boldsymbol{A}_1$, удовлетворяющий условиям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 = C. \tag{7}$$

Из соотношения (6) следует, что

$$\boldsymbol{A}_1 = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Взяв функцию φ в виде

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_G \frac{C(Q)}{R_{PQ}}\, d\tau_Q, \tag{9}$$

мы удовлетворим и уравнению (7). Определим теперь вектор $\boldsymbol{A}_2$ так, чтобы

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 = 0. \tag{11}$$

Полагая

$$\boldsymbol{A}_2 = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \tag{12}$$

мы удовлетворим условию (11). Подставляя (12) в (10), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} - \Delta \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}. \tag{13}$$

Потребуем, чтобы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{14}$$

Тогда уравнение (13) для вектора $\boldsymbol{\psi}$ примет вид

$$\Delta \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{B}. \tag{15}$$

Рассмотрим область G_1, целиком содержащую область G и ограниченную поверхностью S_1.

Продолжим вектор $\boldsymbol{B}$ в область $G_1 - G$, потребовав выполнения условий:

1) нормальная составляющая B_n вектора $\boldsymbol{B}$ на границе S непрерывна (сам вектор $\boldsymbol{B}$, вообще говоря, разрывен), $B_{ni} = B_{ne}$;

2) $$B_n = 0 \quad \text{на} \quad S_1; \tag{16}$$

3) $$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{в} \quad G_1 - G. \tag{4'}$$

Укажем, как осуществить такое продолжение $\boldsymbol{B}$ на область $G_1 - G$. Положим

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{grad} \chi \quad \text{в} \quad G_1 - G.$$

Условие $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ дает

$$\Delta\chi = 0 \quad \text{в} \quad G_1 - G. \tag{17}$$

Граничные условия, в силу 1) и 2), имеют вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = B_{ni} \quad \text{на} \quad S, \tag{17'}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1, \tag{17''}$$

где B_{ni} — предельное значение B_n на внутренней стороне S. Для функции χ мы получим вторую краевую задачу (17)—(17″). Необходимое условие разрешимости этой задачи

$$\iint\limits_{S+S_1} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = \iint\limits_{S} B_n \, dS = 0$$

выполнено, так как

$$\iint\limits_{S} B_n \, dS = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \boldsymbol{B} \, d\tau = 0.$$

Положив

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_1} \frac{\boldsymbol{B}(Q)}{R_{PQ}} d\tau_Q,$$

$$P = P(x, y, z), \; Q = Q(\xi, \eta, \zeta), \; R_{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

мы, очевидно, удовлетворим уравнению (15).

Нетрудно убедиться в том, что условие (14) также выполнено. В самом деле, вычислим производные

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_z}{\partial z}.$$

Представляя интеграл по области G_1 в виде суммы интегралов по G и $G_1 - G$ и учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint B_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint B_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau,$$

после интегрирования по частям будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint\limits_{G} \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint\limits_{G} \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau - \iint\limits_{S} B_{xi} \frac{\cos\alpha}{R} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \iiint\limits_{G_1 - G} \frac{B_x}{R} d\tau = \iiint\limits_{G_1 - G} \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\tau + \iint\limits_{S} B_{xe} \frac{\cos\alpha}{R} dS - \iint\limits_{S_1} B_x \frac{\cos\alpha_1}{R} dS,$$

где $\cos\alpha = \cos(n, x)|_S$, $\cos\alpha_1 = \cos(n, x)|_{S_1}$, $\boldsymbol{n}$ — направление внешней нормали к поверхности.

Для $\frac{\partial\psi_x}{\partial x}$ получим:

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_1}\frac{\partial B_x}{\partial\xi}\frac{1}{R}\,d\tau+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{B_{xe}-B_{xi}}{R}\cos\alpha\,dS-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}B_x\frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS.$$

Аналогичные выражения имеют место для производных

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\quad\text{и}\quad\frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div}\psi=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_1}\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{B}}{R}\,d\tau-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{B_n}{R}\,dS+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{B_{ne}-B_{ni}}{R}\,dS.$$

В силу условий (4), (4′) и (16), а также непрерывности нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{B}$ на S ($B_{ni}=B_{ne}$), вектор $\boldsymbol{A}_2$, определяемый формулой (12), удовлетворяет уравнению (10), если вектор ψ удовлетворяет условиям (14) и (15).

Ясно, что вектор $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=\boldsymbol{B}, \tag{18}$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)=C. \tag{19}$$

Чтобы найти вектор $\boldsymbol{A}$ нам остается удовлетворить граничному условию (3). Для этого найдем вектор $\boldsymbol{A}_3$, удовлетворяющий условиям внутри G:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_3=0, \tag{20}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}_3=0, \tag{21}$$

на S

$$A_{3n}|_S=f(M)-A_{1n}|_S-A_{2n}|_S=f^*(M). \tag{22}$$

Ясно, что функция $f^*(M)$ определена однозначно. Из уравнения (20) следует, что

$$\boldsymbol{A}_3=\operatorname{grad}\theta.$$

Подставляя это значение $\boldsymbol{A}_3$ в уравнение (21), получим внутри G:

$$\Delta\theta=0; \tag{23}$$

условие (22) дает

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S=f^*(M), \tag{24}$$

т. е. для определения функции θ мы получим вторую краевую задачу. Поэтому вектор $\boldsymbol{A}_3$ определится однозначно.

Таким образом, доказано, что задача (1) — (3) имеет единственное решение

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3.$$