V. Применение метода конформного преобразования в электростатике

1. Для решения двумерных электростатических задач часто используется теория функций комплексного переменного. Рассмотрим, например, следующую задачу электростатики:

найти электрическое поле нескольких заряженных проводников, потенциалы которых равны $u_1, u_2, \ldots$

Такая задача, как известно (см. приложение II), приводит к уравнению

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{S_i} = u_i, \tag{2}$$

где через S_i обозначена поверхность проводника с номером i. Если поле можно считать плоским, не меняющимся, например вдоль оси z, то уравнение (1) и граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{C_i} = u_i, \tag{4}$$

где C_i — контур, ограничивающий область S_i.

Будем искать потенциал u как мнимую часть некоторой аналитической функции

$$f(z) = v(x, y) + iu(x, y) \qquad (z = x + iy), \tag{5}$$

причем в силу условий Коши — Римана

$$v_x = u_y, \qquad v_y = -u_x \tag{6}$$

и

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \tag{7}$$

Из граничного условия (4) следует, что функция $f(z)$ имеет постоянную мнимую часть на контурах C_i, ограничивающих наши проводники.

Обращаясь к условию (6), замечаем, что

$$v(x, y) = \text{const} \tag{8}$$

представляет собой уравнение семейства силовых линий[1], в то время как уравнение

$$u(x, y) = \text{const} \tag{9}$$

---

[1]) В самом деле, уравнение силовых линий имеет вид $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. Заменяя u_x и u_y согласно условиям (6) через $-v_y$ и v_x, получим $v_x dx + v_y dy = dv = 0$ или $v(x, y) = \text{const}$.

в силу условия (7) определяет семейство эквипотенциальных линий.

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно найти конформное преобразование

$$w = f(z),$$

переводящее плоскость комплексного переменного

$$z = x + iy$$

на плоскость

$$w = v + iu,$$

при котором границы проводников переходят в прямые

$$u = \text{const}$$

или

$$\operatorname{Im} w = \text{const}.$$

Если известна такая функция $w = f(z)$, то искомый потенциал находится по формуле

$$u = u(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Зная потенциал, можно вычислить электрическое поле

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

и плотность поверхностных зарядов на единицу длины по оси z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

которая в силу условий Коши — Римана равна

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|. \tag{11}$$

2. Поле полубесконечного плоского конденсатора. Найдем поле конденсатора, образованного бесконечно тонкими металлическими пластинами $y = -d/2$ и $y = d/2$, простирающимися в области $x < 0$. Не останавливаясь на выводе конформного преобразования, переводящего область, изображенную на рис. 68 в слой $|\operatorname{Im} w| \leqslant \pi$, мы применяем его непосредственно к решению указанной задачи[1]).

Преобразование

$$z = \frac{d}{2\pi}(w + e^w) \quad (w = \varphi + i\psi) \tag{12}$$

[1]) См. Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. II, гл. XV, § 5, 1937.

переводит плоскость $z = x + iy$ с двумя разрезами ($y = \pm d/2$, $x < 0$) в слой $|\psi| \leqslant \pi$ плоскости $w = \varphi + i\psi$

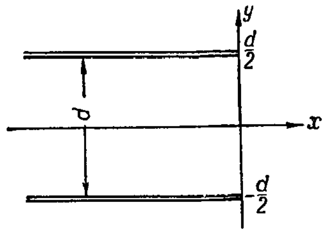

Рис. 68.

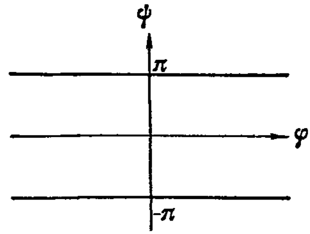

Рис. 69.

(рис. 69). В качестве комплексного потенциала выберем функцию

$$\frac{u_0}{2\pi} w, \tag{13}$$

где через u_0 обозначена разность потенциалов между пластинами конденсатора, так что потенциал электрического поля выражается функцией

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi} \psi, \tag{14}$$

где ψ связано с x и y соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi}(\psi + e^{\varphi}\sin\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

На рис. 70 изображены эквипотенциальные и силовые линии полубесконечного плоского конденсатора.

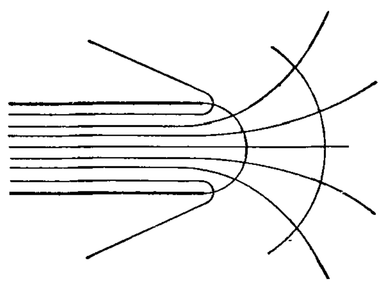

Рис. 70.

Перейдем к исследованию поля вблизи края конденсатора. Из формул (15) видно, что при $\varphi \to -\infty$

$$x \approx \frac{d}{2\pi}\varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi}\psi, \tag{16}$$

т. е. внутри конденсатора, далеко от краев, поле является плоским, а при $\varphi \to \infty$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi} e^{\varphi}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \approx \psi, \tag{17}$$

т. е. вне конденсатора, на больших расстояниях от его краев, эквипотенциальные линии являются кругами.

Если вместо w ввести комплексный потенциал $f=\frac{u_0}{2\pi}w$, так что $w=\frac{2\pi}{u_0}f$, то связь между z и $f(z)$ задается уравнением

$$z=d\left(\frac{f}{u_0}+\frac{1}{2\pi}e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

откуда следует:

$$\frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}\left(1+e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

а при $f=\frac{u_0}{2\pi}(\varphi\pm\pi i)$ мы получаем:

$$\frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}(1-e^{\varphi}) \quad \text{или} \quad f'(z)=\frac{u_0}{d(1-e^{\varphi})}.$$

Полагая $u_0=1$, мы получим для плотности зарядов σ согласно формуле (11) следующее значение:

$$\sigma=\frac{|f'(z)|}{4\pi}=\frac{1}{4\pi d\,|1-e^{\varphi}|}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при $\varphi\to-\infty$ $\sigma\approx 1/4\pi d$, а при $\varphi\to+\infty$ $\sigma\approx 1/4\pi de^{\varphi}$, т. е. в этом случае плотность зарядов убывает на внешней стороне пластин как $1/\rho$.

Из формулы (18) видно, что при $\varphi=0$ (на краю конденсатора) $\sigma=\infty$. В самом деле, край плоской пластины имеет бесконечную кривизну и для того, чтобы зарядить его до некоторого потенциала, необходимо поместить на него бесконечный заряд.

Круг задач, решаемых методом конформного преобразования, очень широк. С его помощью может быть успешно решен вопрос о влиянии края толстой стенки плоского конденсатора, ряд задач, относящихся к влиянию изгибов в конденсаторе и т. п. Конформное преобразование может быть также применено к расчету динамических задач. Недостатком изложенного метода является то, что конформное преобразование применяется в основном лишь к плоским задачам, сводящимся к двумерному уравнению $\Delta_2 u=0$.

VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике

1. При решении задач о движении твердого тела в жидкости существенную роль играют граничные условия на поверхности тела.

В случае идеальной жидкости граничное условие состоит в том, что проекция v_n скорости жидкости на направление нор-