Если вместо w ввести комплексный потенциал $f=\frac{u_0}{2\pi}w$, так что $w=\frac{2\pi}{u_0}f$, то связь между z и $f(z)$ задается уравнением

$$z=d\left(\frac{f}{u_0}+\frac{1}{2\pi}e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

откуда следует:

$$\frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}\left(1+e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

а при $f=\frac{u_0}{2\pi}(\varphi\pm\pi i)$ мы получаем:

$$\frac{dz}{df}=\frac{d}{u_0}(1-e^{\varphi}) \quad \text{или} \quad f'(z)=\frac{u_0}{d(1-e^{\varphi})}.$$

Полагая $u_0=1$, мы получим для плотности зарядов σ согласно формуле (11) следующее значение:

$$\sigma=\frac{|f'(z)|}{4\pi}=\frac{1}{4\pi d|1-e^{\varphi}|}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при $\varphi\to-\infty$ $\sigma\approx 1/4\pi d$, а при $\varphi\to+\infty$ $\sigma\approx 1/4\pi de^{\varphi}$, т. е. в этом случае плотность зарядов убывает на внешней стороне пластин как $1/\rho$.

Из формулы (18) видно, что при $\varphi=0$ (на краю конденсатора) $\sigma=\infty$. В самом деле, край плоской пластины имеет бесконечную кривизну и для того, чтобы зарядить его до некоторого потенциала, необходимо поместить на него бесконечный заряд.

Круг задач, решаемых методом конформного преобразования, очень широк. С его помощью может быть успешно решен вопрос о влиянии края толстой стенки плоского конденсатора, ряд задач, относящихся к влиянию изгибов в конденсаторе и т. п. Конформное преобразование может быть также применено к расчету динамических задач. Недостатком изложенного метода является то, что конформное преобразование применяется в основном лишь к плоским задачам, сводящимся к двумерному уравнению $\Delta_2 u=0$.

VI. Применение метода конформного преобразования в гидродинамике

1. При решении задач о движении твердого тела в жидкости существенную роль играют граничные условия на поверхности тела.

В случае идеальной жидкости граничное условие состоит в том, что проекция v_n скорости жидкости на направление нормали к поверхности тела должна равняться нормальной составляющей скорости движения тела.

Если тело неподвижно, то граничное условие принимает простой вид

$$v_n = 0$$

на поверхности тела.

Если рассматриваемое движение потенциально, т. е.

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

то граничные условия принимают вид

$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$ в случае неподвижного тела,

$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = u_n$ в случае тела, движущегося со скоростью u.

Как известно из гидродинамики, потенциал скоростей для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = 0.$$

Таким образом, задача о потенциальном обтекании твердого тела потоком несжимаемой идеальной жидкости сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

с дополнительным граничным условием на поверхности обтекаемого тела

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = u_n,$$

т. е. к решению второй краевой задачи для уравнения Лапласа.

Если рассматриваемое движение плоское, то решение задачи может быть получено при помощи теории функций комплексного переменного.

В случае плоского движения несжимаемой жидкости уравнение непрерывности дает:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \qquad (1)$$

Запишем уравнения линий тока

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

в виде

$$v_x\,dy - v_y\,dx = 0 \qquad (2)$$

и введем функцию ψ при помощи соотношений

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Тогда из уравнения (1) следует, что левая часть выражения (2) является полным дифференциалом функции ψ:

$$v_x\,dy - v_y\,dx = d\psi.$$

Однопараметрическое семейство кривых

$$\psi(x, y) = C$$

представляет собой линии тока несжимаемой жидкости.

Если существует потенциал скоростей, то равенство $\operatorname{rot} v = 0$ равносильно уравнению

$$\Delta\psi = 0.$$

Из выражений для v_x и v_y следует:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

т. е. функции φ и ψ удовлетворяют условиям Коши — Римана. Следовательно, функция комплексного переменного

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

является аналитической.

Итак, всякое потенциальное плоское движение жидкости соответствует определенной аналитической функции комплексного переменного и, обратно, всякая аналитическая функция связана с определенной кинематической картиной движения жидкости (точнее, с двумя картинами, так как функции φ и ψ можно поменять ролями).

Рассмотрим конкретные примеры применения теории аналитических функций к решению задач об обтекании тел плоским потоком жидкости.

2. Обтекание кругового цилиндра. Пусть на круговой цилиндр радиуса $r = a$ набегает плоский поток жидкости, имеющий на бесконечности постоянную скорость u. В случае стационарного движения задачу можно обратить и рассматривать движение цилиндра с постоянной скоростью u относительно жидкости.

Свяжем с цилиндром неподвижную систему координат и направим ось Ox параллельно скорости движения цилиндра.

На поверхности движущегося в жидкости тела, очевидно, выполняется граничное условие

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = u\frac{\partial y}{\partial s},$$

где ds — элемент дуги на контуре, ограничивающем тело.

В случае поступательного движения со скоростью u это условие может быть проинтегрировано на поверхности тела, и мы получим:

$$\psi = uy + C$$

на поверхности тела.

Итак, наша задача свелась к решению уравнения

$$\Delta\psi = 0$$

с граничными условиями:

1) $\psi = uy + C$ на поверхности цилиндра,

2) $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ стремятся к нулю на бесконечности.

Последнее условие означает, что функция

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

является вне круга C однозначной аналитической функцией, обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке. Это позволяет представить функцию w в виде

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \ldots$$

Положив

$$C_k = A_k + iB_k,$$

мы определим постоянные A_k и B_k из граничного условия

$$\psi = ua \sin\theta + C,$$

перейдя к полярным координатам $z = ae^{i\theta}$.

Для постоянных получаются выражения

$$A_1 = 0; \quad A_2 = ua^2; \quad B_2 = 0; \quad A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Отсюда

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z - u\frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - u\cos\theta\frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + u\sin\theta\frac{a^2}{r}.$$

Первый член в выражении для w выражает циркуляцию интенсивности Γ вокруг цилиндра. В простейшем случае отсутствия циркуляции мы получим

$$w = -u\frac{a^2}{z}.$$

Комплексный потенциал для потока, обтекающего неподвижный цилиндр и имеющего на бесконечности скорость u, имеет вид

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

3. Обтекание пластинки. Полученные результаты для обтекания кругового цилиндра позволяют решать задачи об обтекании произвольных контуров. При этом применяется метод конформного преобразования. Рассмотрим его применение на конкретной задаче об обтекании пластинки.

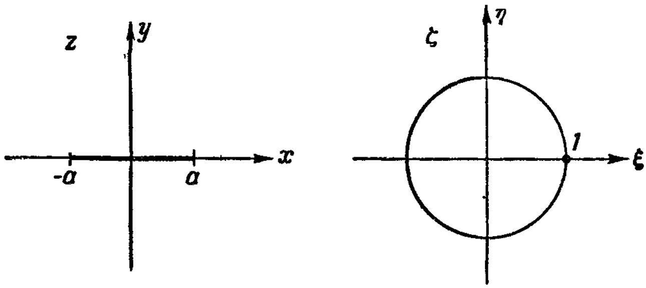

Рис. 71.

Пусть на бесконечно длинную пластинку ширины $2a$, расположенную на оси Ox (рис. 71), набегает постоянный плоский поток, имеющий на бесконечности скорость с компонентами u и v. При помощи аналитической функции

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = f(\zeta)$$

можно установить взаимно однозначное соответствие между областью вне пластинки на плоскости z и областью вне круга единичного радиуса на плоскости ζ. При этом точке $z = \infty$ будет соответствовать точка $\zeta = \infty$, а

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \infty.$$

Посмотрим, как изменится условие на бесконечности. Для комплексного потенциала

$$w(z) = \varphi + i\psi$$

мы имеем

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty} = u - iv = \bar{v}_\infty$$

— сопряженное значение комплексной скорости.

Найдем значение комплексной скорости фиктивного течения на плоскости ζ:

$$w(\zeta) = w\left[f^{-1}(z)\right]; \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta},$$

откуда

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty} = k\bar{v}_\infty \quad \left(k = \frac{a}{2}\right).$$

Итак, фиктивное течение представляет собой обтекание цилиндра единичного радиуса потоком, имеющим на бесконечности комплексную скорость kv_∞. Для такого движения комплексный потенциал имеет вид

$$w(\zeta) = k\bar{v}_\infty\zeta + \frac{kv_\infty}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$

Из соотношения $z = f(\zeta)$ следует:

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{1}{\zeta} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

Используя эти соотношения, мы получим для комплексного потенциала жидкости, обтекающей пластинку, выражение

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right).$$

В случае отсутствия циркуляции это выражение принимает вид

$$w(z) = uz - iv\sqrt{z^2 - a^2}.$$

Из полученных соотношений видно, что скорость на концах пластинки достигает бесконечно больших значений. В реальных условиях это, конечно, не имеет места. Наши результаты объясняются тем, что мы считаем жидкость идеальной. Применяя теорему Бернулли, можно найти выражение для силы, действующей на обтекаемое жидкостью тело.

Изучением сил, с которыми воздух действует на движущееся в нем крыло самолета, занимается аэродинамическая теория крыла. В развитии этой теории исключительная роль принадлежит русским и советским ученым, в первую очередь Н. Е. Жуковскому и С. А. Чаплыгину. В простейшем случае бесциркулярного обтекания цилиндра плоским потоком жидкости мы получаем парадоксальный результат — поток не оказывает на цилиндр никакого действия. В случае наложения на поступательный поток циркуляции скорости вокруг цилиндра возникает сила, действующая на цилиндр перпендикулярно к направлению скорости потока в бесконечности.

Теория аналитических функций может быть использована лишь в случае плоского движения. В трехмерном случае приходится прибегать к другим методам решения задачи об обтекании жидкостью твердого тела. В общем случае решение задачи представляет большие трудности. Рассмотрим простейший случай движения шара в безграничной покоящейся жидкости с постоянной скоростью. Задача заключается в решении уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

вне шара с граничным условием

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = u\cos\theta \text{ на поверхности шара}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ в бесконечности.}$$

Решение ищем в виде

$$\varphi = A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Используя граничное условие, получим:

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2}\cos\theta,$$

что и дает решение поставленной задачи.

Во всех рассмотренных случаях мы считали жидкость идеальной. Для вязкой жидкости граничные условия изменяются. На поверхности тела должно выполняться условие прилипания, а именно: в точках твердой границы скорость жидкости по величине и направлению должна совпадать со скоростью соответствующей точки границы.

Задачи обтекания тел вязкой жидкостью приводят к большим математическим трудностям. В развитии этой области гидродинамики большую роль сыграли теории пограничного слоя.

VII. Бигармоническое уравнение

В приложении II к главе II было получено уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \qquad (1)$$

Задача о колебании тонкой пластинки, свободной от нагрузки и закрепленной на краях, также приводит к аналогичному уравнению[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}\right) = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\Delta\;\Delta u = 0 \qquad (2)$$

---

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1956.