обтекании жидкостью твердого тела. В общем случае решение задачи представляет большие трудности. Рассмотрим простейший случай движения шара в безграничной покоящейся жидкости с постоянной скоростью. Задача заключается в решении уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

вне шара с граничным условием

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = u\cos\theta \text{ на поверхности шара}$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ в бесконечности.}$$

Решение ищем в виде

$$\varphi = A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Используя граничное условие, получим:

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2}\cos\theta,$$

что и дает решение поставленной задачи.

Во всех рассмотренных случаях мы считали жидкость идеальной. Для вязкой жидкости граничные условия изменяются. На поверхности тела должно выполняться условие прилипания, а именно: в точках твердой границы скорость жидкости по величине и направлению должна совпадать со скоростью соответствующей точки границы.

Задачи обтекания тел вязкой жидкостью приводят к большим математическим трудностям. В развитии этой области гидродинамики большую роль сыграли теории пограничного слоя.

VII. Бигармоническое уравнение

В приложении II к главе II было получено уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Задача о колебании тонкой пластинки, свободной от нагрузки и закрепленной на краях, также приводит к аналогичному уравнению[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}\right) = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\Delta\ \Delta u = 0 \tag{2}$$

---

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1956.

и граничным условиям

$$u=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на границе.} \tag{3}$$

Кроме того, функция u должна удовлетворять начальным условиям

$$u(x, y, 0)=\varphi(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0)=\psi(x, y). \tag{4}$$

Если на пластинку действует внешняя сила, распределенная с плотностью $f(x, y)$, то статический прогиб закрепленной по краям пластинки будет определяться из уравнения

$$\Delta\Delta u=f \tag{5}$$

при граничных условиях

$$u=0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial n}=0. \tag{3}$$

Уравнение

$$\Delta\Delta u=0 \tag{5'}$$

называется **бигармоническим**, а его решения, имеющие производные до 4-го порядка включительно, называются **бигармоническими функциями**.

Основная краевая задача для бигармонического уравнения ставится следующим образом:

найти функцию $u(x, y)$, непрерывную вместе с первой производной в замкнутой области $S+C$, имеющую производные до 4-го порядка в S, удовлетворяющую уравнению (5) *или* (5') *внутри S и граничным условиям на C*

$$u|_C=g(s); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C=h(s), \tag{6}$$

где $g(s)$ и $h(s)$ — непрерывные функции дуги s.

При решении формулированной выше задачи (2) — (4) с начальными условиями методом разделения переменных полагают, как обычно,

$$u(x, y, t)=v(x, y) T(t). \tag{7}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2) и разделяя переменные, мы приходим к задаче об отыскании собственных значений уравнения

$$\Delta\Delta v-\lambda v=0 \tag{8}$$

при граничных условиях

$$v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}=0 \text{ на } C. \tag{9}$$

1. Единственность решения. Докажем, что *бигармоническое уравнение*

$$\Delta\Delta u=0$$

при граничных условиях

$$u|_C = g(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s) \tag{3'}$$

имеет единственное решение.

Пусть существует два решения u_1 и u_2. Рассмотрим их разность

$$v = u_1 - u_2.$$

Функция v удовлетворяет бигармоническому уравнению (5') и однородным граничным условиям

$$v|_C = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_C = 0.$$

Применяя формулу Грина

$$\int_G (\Delta\varphi \cdot \psi - \varphi\,\Delta\psi)\,dS = \int_C \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds$$

к функциям $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$, получаем:

$$\int_G (\Delta v)^2\,dS = 0,$$

откуда

$$\Delta v = 0.$$

Принимая во внимание, что $v|_C = 0$, получаем

$$v \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1 \equiv u_2.$$

Следовательно, бигармоническая функция однозначно определяется граничными условиями (3').

2. Представление бигармонических функций через гармонические функции. Докажем следующую теорему:

если u_1 и u_2 — две гармонические в некоторой области G функции, то функция $u = xu_1 + u_2$ бигармонична в области G.

Для доказательства воспользуемся тождеством

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\,\Delta\psi + \psi\,\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Полагая

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

найдем:

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{11}$$

Применяя еще раз оператор Δ, учитывая, что $\Delta\Delta u_2 = 0$, получим:

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

Если область G такова, что каждая прямая, параллельная оси x, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то имеет место обратная теорема:

для каждой заданной в области G бигармонической функции u найдутся такие гармонические функции u_1 и u_2, что

$$u = xu_1 + u_2.$$

Для доказательства этого утверждения, очевидно, достаточно установить возможность выбора функции u_1, удовлетворяющей двум условиям:

$$\Delta u_1 = 0, \tag{12}$$

$$\Delta(u - xu_1) = 0. \tag{13}$$

Из условия (13) и формулы (11) следует:

$$\Delta u = \Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{14}$$

Уравнению (14) удовлетворяет функция

$$\bar{u}_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\Delta u(\xi, y)\, d\xi.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\bar{u}_1 = \Delta\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}_1 = \frac{1}{2}\Delta\Delta u = 0,$$

то $\Delta\bar{u}_1$ зависит только от y:

$$\Delta\bar{u}_1 = v(y).$$

Определим функцию $\bar{\bar{u}}_1(y)$ так, чтобы

$$\Delta\bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2\bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = -v(y),$$

и положим $u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1$. Эта функция, очевидно, будет удовлетворять обоим условиям (12) и (13).

Рассмотрим другой вид представления бигармонических функций. Допустим, что начало координат выбрано внутри области G и что любой луч, выходящий из начала, пересекает границу области G, в одной точке. Тогда *любая бигармоническая в G функция u может быть представлена с помощью двух гармонических функций u_1 и u_2 в виде*

$$u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2. \tag{15}$$

Здесь $r^2 = x^2 + y^2$, а r_0 — заданная постоянная.

Это доказывается аналогично предыдущему с помощью тождества (10) и соотношений

$$\Delta r^2 = 4; \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

3. Решение бигармонического уравнения для круга. Рассмотрим круг радиуса r_0 с центром в начале координат и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $r = r_0$ граничным условиям (6). Как было указано выше, искомую функцию можно представить в виде суммы

$$u = (r^2 - r_0^2)\,u_1 + u_2, \tag{15}$$

где u_1 и u_2 — гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2\big|_{r=r_0} = g. \tag{16}$$

Отсюда видно, что u_2 есть решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлено с помощью интеграла Пуассона

$$u_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\,g\,d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)}. \tag{17}$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = h. \tag{18}$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\,\frac{\partial u_2}{\partial r} \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона

$$2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\,\frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\,h\,d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)}. \tag{20}$$

Продифференцировав (17) по r и подставляя значение $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ в формулу (20), найдем u_1. Заменяя в формуле (15) u_1 и u_2 их выражениями, получим:

$$u = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2 - r_0^2)^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-h\,d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)} + \int_0^{2\pi} \frac{g\,[r_0 - r\cos(\alpha - \theta)]\,d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\alpha - \theta)]^2}\right].$$