ГЛАВА V

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе рассматривается задача с начальными данными (задача Коши) для уравнения колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \qquad u = u(M, t) \tag{1}$$

в неограниченном пространстве $(M = M(x, y, z))$ и на плоскости $(M = M(x, y))$.

§ 1. Задача с начальными условиями

1. Уравнение колебаний в пространстве. Простейшим уравнением гиперболического типа является уравнение колебаний (1), которое в физике часто называют уравнением Даламбера.

В гл. II было показано, что уравнение (1) описывает процесс распространения звука в газе, процесс колебаний мембраны; в этом случае (1) имеет вид

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(x, y, t).$$

К уравнению (1) приводят также задачи о распространении электромагнитных полей в непроводящей среде и задачи теории упругости (см. Приложение 1 к гл. V).

Для уравнения (1) рассматриваются задача с начальными данными (задача Коши) в бесконечном пространстве и краевые задачи в ограниченной области.

В этой главе мы будем рассматривать задачу Коши в неограниченном пространстве:

найти решение уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(M, t), \qquad M = M(x, y, z) \tag{1}$$

при

$$t > 0, \quad -\infty < x, y, z < \infty,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{2}$$

где f, φ, ψ — *заданные функции.*

Решением уравнения (1) в некоторой области при $t>0$ будем называть функцию $u(M,t)$, непрерывную вместе со своими производными, входящими в уравнение (1) во всех точках рассматриваемой области и для всех $t>0$.

Рассмотрим частные решения однородного уравнения

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}u_{tt}, \tag{3}$$

обладающие центральной симметрией относительно некоторой точки M_0, т. е. решения вида

$$u(M,t)=u(r,t),$$

где $r=r_{MM_0}$ — расстояние между точками M и M_0. В этом случае уравнение колебаний (3) сводится к одномерному уравнению для функции $v=ru$

$$v_{rr}=\frac{1}{a^2}v_{tt}. \tag{4}$$

В самом деле, если $u=u(r,t)$, то оператор Лапласа в сферической системе координат с центром в точке M_0 (см. гл. IV, § 1, п. 3) может быть преобразован к виду

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

в чем можно убедиться дифференцированием. Поэтому уравнение (3) принимает вид $\frac{1}{r}(ru)_{rr}=\frac{1}{a^2}u_{tt}$. Вводя затем функцию $v=ru$, получаем для нее уравнение (4). Если функция $u(r,t)$ ограничена при $r=0$, то функция $v=ru$ обращается в нуль при $r=0$, $v(0,t)=0$. Поэтому задача Коши для уравнения (3) с начальными данными

$$u(r,0)=\varphi(r), \qquad u_t(r,0)=\psi(r) \tag{5}$$

сводится к задаче о колебаниях полуограниченной струны ($0\leqslant r<\infty$) с закрепленным концом $r=0$:

$$v_{rr}=\frac{1}{a^2}v_{tt}, \quad v(r,0)=r\varphi(r), \quad v_t(r,0)=r\psi(r), \quad v(0,t)=0, \tag{6}$$

рассмотренной в гл. II.

Общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$v(r,t)=f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{a}\right)$$

и, следовательно,

$$u(r,t)=\frac{1}{r}f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{r}f_2\left(t+\frac{r}{a}\right),$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Частные решения уравнения (3)

$$u_1 = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

называются сферическими волнами; $u_1(r, t)$ есть расходящаяся сферическая волна, $u_2(r, t)$ — сходящаяся в точку $r = 0$ сферическая волна, a — скорость распространения волн. В отличие от плоских волн $f\left(t \pm \frac{x}{a}\right)$ сферическая волна убывает обратно пропорционально расстоянию от центра.

Таким образом, общее решение уравнения (3) в случае центральной симметрии представляется в виде суммы двух сферических волн.

Учитывая условие $v(0, t)$, находим $0 = f_1(t) + f_2(t)$ или $f_2(t) = -f_1(t) = f(t)$ для всех значений t, т. е.

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right) \tag{7}$$

и, в частности,

$$u(0, t) = \frac{2}{a} f'(t). \tag{7'}$$

2. Метод усреднения. Рассмотрим в неограниченном пространстве задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 \Delta u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0; \\ &u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M), \quad M = M(x, y, z). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Предположим, что решение этой задачи существует и найдем для него интегральное представление. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксированная точка. Введем сферическую систему координат (r, θ, φ) с началом в точке M_0.

Рассмотрим функцию

$$\bar{u}(r, t) = M_r[u] = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r} u\, dS = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_r} u\, d\Omega \quad (dS = r^2\, d\Omega), \tag{9}$$

являющуюся средним значением u на сфере S_r радиуса r с центром в точке M_0, $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Из (9) видно, что

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0). \tag{10}$$

Покажем, что функция $r\bar{u}(r, t) = v$, обладающая сферической симметрией относительно точки M_0, удовлетворяет уравнению (4). Проинтегрируем уравнение (8) по объему шара K_r, ограниченного сферой S_r:

$$\iiint\limits_{K_r} \Delta u\, d\tau = \frac{1}{a^2} \iiint\limits_{K_r} u_{tt}\, d\tau.$$

Для преобразования левой части полученного равенства используем первую формулу Грина (глава IV) при $v = 1$, $u = \bar{u}(r, t)$ и учтем, что нормаль к S_r направлена по радиусу $\left(\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}\right)$

$$\iiint\limits_{K_r} \Delta u\, d\tau = \iint\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} r^2\, d\Omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\iint\limits_{S_r} u\, d\Omega\right] = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{a^2} \iiint\limits_{K_r} u_{tt}\, d\tau = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_0^r \rho^2\, d\rho \left[\iint\limits_{S_r} u\, d\Omega\right] = \frac{4\pi}{a^2} \int\limits_0^r \bar{u}_{tt}(\rho, t)\, \rho^2\, d\rho. \tag{12}$$

Дифференцируя (11) и (12) по r и полагая $v = r\bar{u}$, получим (4). Из формулы (7′) следует, что

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} f'(t_0). \tag{13}$$

Выразим f через φ и ψ. После дифференцирования $\bar{u} = \frac{1}{r}\left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]$ по r и t найдем $(r\bar{u})_r + \frac{1}{a}(r\bar{u})_t = \frac{2}{a} f'\left(t + \frac{r}{a}\right) = \frac{2}{a} f'(t_0)$ при $t = 0$ и $r = at_0$. Отсюда и из (13) и (9) следует

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r} \iint\limits_{S_r} ru\, d\Omega + \frac{1}{a} \iint\limits_{S_r} r \frac{\partial u}{\partial t}\, d\Omega\right]_{r = at_0,\ t = 0}. \tag{14}$$

3. Формула Пуассона. Пользуясь начальными условиями (8) и опуская индекс 0 при M_0, t_0, получаем из (14) формулу Пуассона

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t} t \iint\limits_{S_{at}} \varphi(P)\, d\Omega_P + t \iint\limits_{S_{at}} \psi(P)\, d\Omega_P\right], \tag{15}$$

$$(dS_P = (at)^2\, d\Omega_P),$$

которую, учитывая (9), можно записать в виде

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} tM_{at}[\varphi] + tM_{at}[\psi], \tag{16}$$

где

$$M_{at}[\varphi]=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{at}^M}\varphi\,d\Omega=\frac{1}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}^M}\varphi\,dS. \tag{17}$$

Здесь $S_{at}=S_{at}^M$ — сфера радиуса at с центром в точке M.

Пусть u_ψ — решение задачи (8) при $\varphi=0$,

$$u_\psi(M,t)=tM_{at}[\psi]. \tag{18}$$

Из (16) видно, что решение задачи (8) можно записать в виде

$$u(M,t)=\frac{\partial}{\partial t}u_\varphi+u_\psi, \tag{19}$$

где

$$u_\varphi=tM_{at}[\varphi]\ ^{1)}. \tag{18'}$$

Из формулы Пуассона, полученной в предположении существования решения задачи (8), следует единственность указанного решения. В самом деле, предполагая, что задача Коши имеет два решения u_1 и u_2, получим для их разности начальные условия $\varphi=0$, $\psi=0$. Применяя к функции u_1-u_2 предыдущие рассуждения, приходим к формуле (15), в которой $\varphi=0$, $\psi=0$ и, следовательно, $u\equiv 0$ или $u_1\equiv u_2$.

Покажем, что функция $u(M,t)$, определяемая формулой Пуассона, в самом деле дает решение задачи Коши (8), если $\varphi(x,y,z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\psi(x,y,z)$ — до второго порядка включительно. Доказательство проведем, предполагая сначала, что $\varphi=0$, т. е. $u=u_\psi$. Введем новые переменные α, β, γ, положив $\xi=x+at\alpha$, $\eta=y+at\beta$, $\zeta=z+at\gamma$. Отсюда видно, что α, β, γ — направляющие косинусы радиуса-вектора точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ сферы S_{at} ($\alpha=\cos(r,x)$ и т. д.). Тогда интеграл по S_{at} преобразуется в интеграл по сфере S_1 ($\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) единичного радиуса, причем $dS_1=d\Omega_1=dS/a^2t^2$, а под знаком интеграла (15) будет

$$\psi(x+at\alpha,\ y+at\beta,\ z+at\gamma)=\psi(\xi,\eta,\zeta).$$

Нетрудно заметить, что

$$u_\psi=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\psi(\xi,\eta,\zeta)\,dS_1, \tag{20}$$

$$\Delta u_\psi=(u_\psi)_{xx}+(u_\psi)_{yy}+(u_\psi)_{zz}=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1}(\psi_{\xi\xi}+\psi_{\eta\eta}+\psi_{\zeta\zeta})\,dS_1=$$
$$=\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_{at}}\cdot\Delta\psi\,d\Omega, \tag{21}$$

---

1) Ср. (19) с формулой Даламбера.

так как $\psi_{xx}=\psi_{\xi\xi}$ и т. д. При дифференцировании по t под знаком интеграла (20) получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a(\psi_\xi\alpha+\psi_\eta\beta+\psi_\zeta\gamma)=a\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$(u_\psi)_t=\frac{u_\psi}{t}+\frac{v}{t},\qquad v=\frac{at^2}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dS_1=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dS. \tag{22}$$

Дифференцируя (22) по t, найдем $(t(u_\psi)_t)_t=t(u_\psi)_{tt}+(u_\psi)_t=(u_\psi)_t+v_t$, т. е.

$$(u_\psi)_{tt}=\frac{1}{t}v_t. \tag{23}$$

Первая формула Грина дает

$$v=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dS=\frac{1}{4\pi a}\iiint\limits_{K_{at}}\Delta\psi\,d\tau=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_0^{at}\rho^2\,d\rho\iint\limits_{S_\rho}\Delta\psi\,dS, \tag{24}$$

где K_{at} — шар радиуса at, S_ρ — сфера радиуса ρ с центром в точке $M(x, y, z)$. Вычислим производную, пользуясь при этом равенством (21)

$$v_t=\frac{a^2t^2}{4\pi}\iint\limits_{S_{at}}\Delta\psi\,dS=a^2t\,\Delta u_\psi.$$

Отсюда и из (23) следует $(u_\psi)_{tt}=a^2\Delta u_\psi$, т. е. u_ψ удовлетворяет уравнению (8). Нетрудно убедиться в том, что функция $\partial u_\varphi/\partial t$ также удовлетворяет уравнению (8), если имеет производные до третьего порядка включительно.

Покажем, что u_ψ, определяемая формулой (20), удовлетворяет начальным условиям. Формулы (20), (22) дают $u_\psi(M, 0)=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{u_\psi}{t}=\psi(M)$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{v}{t}=0$, так как функция ψ непрерывна и все интегралы ограничены. Поэтому, согласно (22), $(u_\psi)_t=\frac{1}{t}u_\psi+\frac{1}{t}v\to\psi(M)$ при $t\to 0$ и аналогично $u_\varphi\to 0$ при $t\to 0$.

Из формулы (18′) для u_φ видно, что $(u_\varphi)_{tt}=0$ при $t=0$ и, следовательно, функция (16) удовлетворяет условиям (8). Тем самым доказано, что формула Пуассона (16) определяет решение задачи Коши (8).

Из формулы (16) непосредственно видна непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных данных.

4. Метод спуска. Полученная в предыдущем пункте формула (19) решает в пространстве (x, y, z) однородное уравнение колебаний с начальными условиями, являющимися, вообще говоря, произвольными функциями переменных x, y и z. Если начальные функции φ и ψ не зависят от z, то, очевидно, и функция u, даваемая формулой (19), также не будет зависеть от переменного z. Следовательно, эта функция будет удовлетворять уравнению

$$u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

и начальным условиям

$$u(x, y, 0)=\varphi(x, y),$$
$$u_t(x, y, 0)=\psi(x, y).$$

Таким образом, формула, дающая решение пространственной задачи, позволяет также решить задачу для плоскости.

В формуле (15) интегрирование происходит по сфере S_{at}^M. В силу независимости начальных данных от z интегрирование по верхней полусфере можно заменить интегрированием по кругу Σ_{at}^M, получающемуся при пересечении сферы S_{at}^M с плоскостью (x, y) (рис. 72). Элемент поверхности dS связан с элементом плоскости $d\sigma$ соотношением

$$d\sigma = dS\cos\gamma,$$

где

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}{at}=\frac{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}.$$

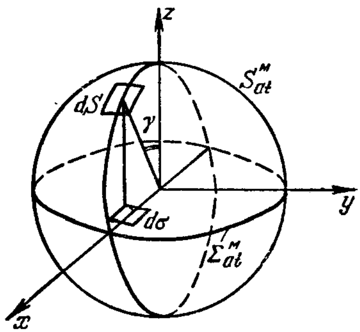

Рис. 72.

То же относится к интегрированию по нижней полусфере; следовательно, интеграл по кругу следует взять дважды.

В результате мы приходим к формуле

$$u(M, t)=u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right], \quad (25)$$

в которой интегрирование производится по внутренности круга радиуса at с центром в точке (x, y).

Аналогично, если начальные функции φ и ψ зависят только от одного переменного x, то формула (19) позволяет найти функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Для этого введем сферическую систему координат, направив полярную ось по оси x. Элемент поверхности dS выразится следующим образом:

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = -r \, d\varphi \, d\xi,$$

так как

$$\xi = x + r\cos\theta, \qquad d\xi = -r\sin\theta \, d\theta.$$

Интегрируя в формуле Пуассона (15) по φ, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi\right].$$

Выполняя в первом интеграле дифференцирование по t, приходим к известной из главы II, § 2 формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{26}$$

Уравнение колебаний с тремя, двумя и, соответственно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн. Эта терминология вполне соответствует примененному выше методу, называемому *методом спуска*, поскольку при решении уравнения колебаний на плоскости и на прямой мы исходили из пространственной задачи, как бы «спускаясь» к меньшему числу переменных. Полученные решения для двух и одного переменного носят характер цилиндрических и плоских волн.

Метод спуска применим не только к уравнению колебания, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для многих переменных, извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

5. Физическая интерпретация. Формулы (15) и (25) дают возможность выяснить физическую картину распространения сферических и цилиндрических волн. Начнем со случая трех переменных, для которого физический характер процесса распространения существенно отличается, как мы увидим из дальнейшего, от случая двух пространственных переменных.

Ограничимся изучением распространения локального возмущения, когда начальное состояние (функции $\varphi > 0$ и $\psi > 0$) отлично от нуля только в некоторой ограниченной области T_0. Рассмотрим сначала изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0, лежащей вне области T_0 (рис. 73). Состояние u в точке M_0 в момент времени t определяется в силу (15) начальным состоянием в точках, лежащих на сфере $S_{at}^{M_0}$ радиуса at с центром в M_0. Функция $u(M_0, t)$ отлична от нуля только в том случае, если сфера $S_{at}^{M_0}$ пересекает область начальных значений T_0. Пусть d и D — расстояния от точки M_0 до ближайшей и наиболее удаленной точек области T_0 (рис. 73). Очевидно, если t достаточно мало ($t < t_1 = d/a$), то сфера $S_{at}^{M_0}$ не пересекается с областью T_0, поверхностные интегралы в формуле (15) равны нулю: до точки M_0 возмущение еще не дошло. Начиная с момента $t_1 = d/a$ до момента $t_2 = D/a$ сфера $S_{at}^{M_0}$ $(t_1 < t < t_2)$ будет пересекать область T_0; поверхностные интегралы в формуле (15), вообще говоря, отличны от нуля: точка M_0 находится в возбужденном состоянии. При дальнейшем увеличении t сфера $S_{at}^{M_0}$ будет содержать область T_0 внутри себя, поверхностные интегралы равны нулю: возмущение прошло точку M_0. Таким образом, при распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явление последействия отсутствует.

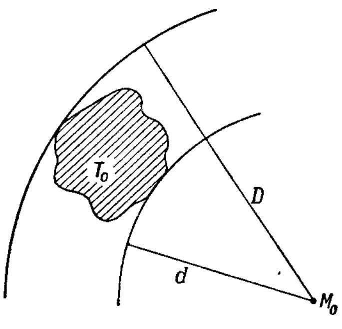

Рис. 73.

Рассмотрим теперь мгновенную пространственную картину возмущения $u(M, t_0)$ в некоторый момент t_0. Точки M, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы $S_{at_0}^{M}$ пересекают область начальных возмущений T_0. Иными словами, это означает, что геометрическое место точек W, в которых возмущение отлично от нуля, состоит из точек M, находящихся на сферах $S_{at_0}^{P}$ радиуса at_0 с центрами в точках P области T_0. Огибающие семейства сфер $S_{at_0}^{P}$ будут границами области W. Внешняя огибающая называется передним фронтом, внутренняя — задним фронтом распространяющейся волны. На рис. 74 изображены передний и задний фронты волны (*1* и *2*) для того случая, когда область T_0 является сферой радиуса R_0.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M_0 пространства действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с резко очерченными передним и задним фронтами (принцип Гюйгенса).

Перейдем к случаю двух переменных. Пусть начальное возмущение задано в области S_0 на плоскости (x, y). Рассмотрим изменение состояния $u(M_0, t)$ в точке M_0, лежащей вне S_0. Состояние $u(M_0, t)$ в точке M_0 в момент t определяется согласно (25) начальными значениями в точках P, принадлежащих кругу $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ радиуса at_0 с центром в M_0. Для моментов времени $t < t_1 = d/a$ (d — расстояние от M_0 до ближайшей точки области S_0) функция $u(M_0, t) = 0$ — до точки M_0 возмущение еще не дошло. Если $t > t_1$, то $u(M_0, t) \neq 0$. Это значит, что, начиная с момента $t = t_1$, в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала, вообще говоря, возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, постепенно убывает до нуля (при $t \to \infty$). В этом явлении последействия и заключается отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последействием. Принцип Гюйгенса не имеет места.

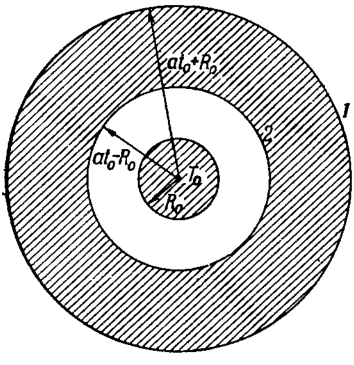

Рис. 74.

Мгновенная картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего фронта. Задачу для двух измерений можно рассматривать как пространственную задачу, когда начальные возмущения заданы в бесконечном цилиндре и не зависят от третьей координаты. Пользуясь этой схемой, легко себе представить процесс последействия.

6. Метод отражения. Задача с начальными условиями для уравнения колебаний в случае областей, ограниченных плоскостями, может быть решена методом отражений.

Рассмотрим задачу для полупространства $z > 0$: *найти решение уравнения колебаний*

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) &= \psi(x, y, z) \end{aligned}\right\} \quad (z \geqslant 0)$$

и граничному условию

$$u\Big|_{z=0}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0.$$

Решение этой задачи дается формулой (15), если начальные условия продолжить на все пространство нечетно по z (при $u|_{z=0}=0$)

$$\varphi(x, y, z)=-\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z)=-\psi(x, y, -z)$$

или четно $\left(\text{при } \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0\right)$

$$\varphi(x, y, z)=\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z)=\psi(x, y, -z).$$

Проверим, что при нечетном по переменной z продолжении функций φ и ψ граничное условие $u|_{z=0}=0$ выполняется автоматически. В самом деле,

$$u(P, t)=u(x, y, 0, t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^P}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\,ds+\iint\limits_{S_{at}^P}\frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\,ds\right]=0,$$

так как поверхностные интегралы по сферам с центрами в точках плоскости $z=0$ равны нулю при нечетных функциях φ и ψ.

Аналогично может быть решена задача для плоского слоя $0\leqslant z\leqslant l$ при граничных условиях первого и второго рода

$$u=0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=0 \text{ и } z=l$$

и соответствующих начальных условиях.

Формула (15) сразу же дает решение задачи, если начальные условия продолжить нечетно (или четно) относительно плоскостей $z=0$ и $z=l$. Определяемые таким образом начальные функции φ и ψ будут периодическими по переменному z с периодом $2l$ (ср. гл. II, § 2, п. 7).

Если в слое $0<z<l$ начальные функции φ и ψ являются локальными функциями, отличными от нуля в области T_0, то продолженные функции будут отличны от нуля в ряде областей T_n, получающихся из T_0 при помощи зеркальных изображений. Функция $u(M, t)$ для всякого M и t представляется как сумма конечного числа слагаемых, определяемых возмущениями в T_n (ср. с главой II, § 2, п. 7). Физический смысл этого заключается в том, что за конечный промежуток времени происходит конечное число отражений от стенок $z=0$ и $z=l$. Аналогично может быть решена задача для параллелепипеда.