§ 2. Интегральная формула

1. Вывод интегральной формулы. При решении уравнения колебания струны

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f$$

методом распространяющихся волн мы широко пользовались понятием характеристического угла. Переходя к решению уравнения колебания на плоскости или в пространстве

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f, \tag{1}$$

рассмотрим поверхность

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|,$$

называемую характеристическим конусом для точки M_0 и момента t_0. Совокупность точек «фазового» пространства

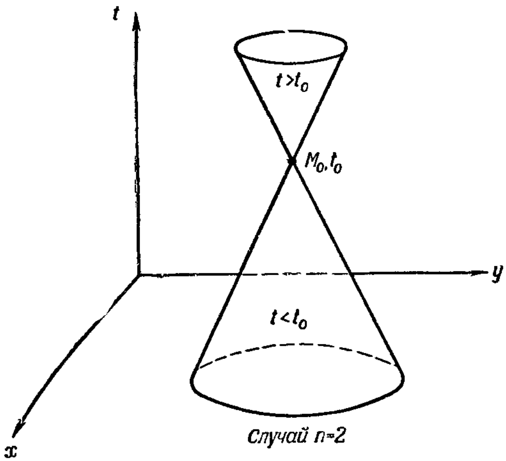

Рис. 75.

(M, t), в которые приходит сигнал, распространяющийся со скоростью a и вышедший из точки M_0 в момент t_0, определяется уравнением

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0 \quad (t > t_0)$$

и является верхней полостью характеристического конуса точки M_0. Аналогично сигнал, вышедший из точки M в момент t, приходит в точку M_0 в момент t_0, если

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t \quad (t < t_0).$$

Геометрическое место таких точек (M, t) образует нижнюю полость характеристического конуса (рис. 75).

Для определения в точке (M_0, t_0) функции $u(M, t)$, представляющей решение уравнения (1), введем вместо времени t локальное время t^* точки M_0, полагая

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$$

и оставляя при этом неизменными геометрические координаты. Пользуясь сферической системой координат (r, θ, φ), связанной с точкой M_0, мы приходим к новой системе переменных

$$r^* = r, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi, \quad t^* = t - \left(t_0 - \frac{r}{a}\right).$$

Установим уравнение, которому удовлетворяет функция

$$u(r, \theta, \varphi, t) = u\left(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^* + t_0 - \frac{r}{a}\right) = U(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*).$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Выразим производные функции u через производные функции U:

$$u_r = U_{r^*} + \frac{1}{a} U_{t^*},$$

$$u_{rr} = U_{r^*r^*} + \frac{2}{a} U_{r^*t^*} + \frac{1}{a^2} U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta = U_{\theta^*}; \qquad u_{\theta\theta} = U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi = U_{\varphi^*}; \qquad u_{\varphi\varphi} = U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t = U_{t^*}; \qquad u_{tt} = U_{t^*t^*}.$$

Уравнение (1) переходит в уравнение

$$\Delta U = -\frac{2}{ar^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^* U_{t^*}) - F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*), \tag{2}$$

где

$$F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*) = f(r, \theta, \varphi, t).$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит некоторому телу T, ограниченному поверхностью S. Рассматривая (2) как неоднородное уравнение Лапласа, в котором t^* играет роль параметра, воспользуемся основной формулой Грина (глава IV). Применим ее к области T, полагая при этом $t^* = 0$[1]):

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint_S \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right] dS + \\ + \iiint_T \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau + \iiint_T \frac{F}{r^*}\, d\tau.$$

Точка M_0 является особой точкой сферической системы координат. Поэтому объемные интегралы естественно рассматривать как пределы при $\varepsilon \to 0$ соответствующих интегралов, взятых по объему $T - T_\varepsilon$, где T_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0. Преобразуем объемный интеграл

$$I_\varepsilon = \iiint_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau = \\ = \iiint_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right)\sin\theta^*\, dr^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Интегрируя по переменному r^*, получим:

$$I_\varepsilon = \iint_S \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\cos(\widehat{n, r^*})\, dS - \iint_{S_\varepsilon} \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\, dS,$$

так как

$$dS_n = dS\cos(\widehat{n, r^*}) = r^{*2}\sin\theta^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Второе слагаемое в I_ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, так как площадь поверхности S_ε равна $4\pi\varepsilon^2$. Таким образам, предел I_ε при $\varepsilon \to 0$ равен

$$I_0 = \iiint_T \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau = \iint_S \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr^*}{dn}\, dS$$ [2]),

так как

$$\cos(\widehat{n, r^*}) = \frac{dr^*}{dn},$$

[1]) В силу принятого в главе IV условия знаки в формуле соответствуют внешней нормали.

[2]) При этом преобразовании мы пользуемся тем, что $d\tau = (r^*)^2\, d\Omega\, dr$, интегрируем по r^* и затем заменяем $d\Omega = \dfrac{dS}{(r^*)^2}$.

что дает:

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint\limits_S \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right) + \frac{2}{ar^*}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr^*}{dn}\right)dS + \iiint\limits_T \frac{F}{r^*}\,d\tau.$$

Вернемся к старым переменным и функции u:

$$u(M, t) = U(M, t^*) \quad \left(t = t^* + t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right),$$

так что

$$U(M_0, 0) = u(M_0, t_0),$$

а также

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr}{dn}.$$

В результате для функции $u(M_0, t_0)$ получаем следующую интегральную формулу:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{dr}{dn}\right\}dS_M + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T \frac{[f]}{r}\,d\tau_M, \qquad (3)$$

часто называемую формулой Кирхгоффа[1]). Здесь квадратные скобки показывают, что значение функций надо брать для $t^* = 0$, т. е. при $t = t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}$, так что $[f] = f\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$.

2. Следствия из интегральной формулы. Формула (3) находит свое применение при решении целого ряда задач. В качестве первого примера рассмотрим задачу с начальными данными:

найти решение уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0$$

в неограниченном пространстве, если заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

[1]) Формула Кирхгоффа была обобщена С. Л. Соболевым для уравнения гиперболического типа с четным числом переменных. При помощи этой формулы Кирхгоффа — Соболева может быть построено решение задачи с начальными условиями для указанного уравнения (С. Л. Соболев, ДАН СССР, 1933).

Нижняя полость характеристического «конуса» $r=a(t_0-t)$ точки (M_0, t_0) пересекается с многообразием $t=0$ по сфере $S_{at_0}^{M_0}$ $(r=at_0)$ радиуса at_0 с центром в точке M_0. Воспользуемся формулой (3), полагая в ней $S=S_{at_0}^{M_0}$. Для любой функции $v(M,t)$ значения $[v]$ на сфере $S_{at_0}^{M_0}$ имеет вид

$$[v]=v\left(M,\ t_0-\frac{r_{M_0M}}{a}\right)=v(M,0),\ \text{так как}\ r_{MM_0}=at_0.$$

Поэтому, если точка M лежит на сфере $S_{at_0}^{M_0}$, то

$$[u]_S=u(M,0)=\varphi(M),$$
$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_S=\frac{\partial u}{\partial t}(M,0)=\psi(M),$$
$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S=\frac{\partial u}{\partial r}(M,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}(M).$$

Далее

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi).$$

Подставляя это выражение в (3), находим:

$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{at_0}^{M_0}}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)+\frac{1}{ar}\psi\right\}dS=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}}r\varphi\,d\Omega+\frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^{M_0}}r\psi\,d\Omega\right]_{r=at_0},$$

откуда, опуская индексы 0 при M_0 и t_0, получаем формулу Пуассона

$$u(M,t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\varphi(P)}{r_{MP}}dS+\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\psi(P)}{r_{MP}}dS\right]\quad(r_{MP}=at)\tag{4}$$

(см. (15), § 1).

В качестве второго примера рассмотрим теперь решение неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными данными. Выбирая по-прежнему $S=S_{at_0}^{M_0}$, убеждаемся в том, что поверхностный интеграл в (3) обращается в нуль, вследствие чего получаем:

$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{T_{at_0}^{M_0}}\frac{[f]}{r}d\tau_M,\tag{5}$$

где $T_{at_0}^{M_0}$ — шар радиуса at_0 с центром в M_0. Исследуем подробнее тот случай, когда правая часть является периодической функцией времени

$$f(M, t) = f_0(M) e^{i\omega t},$$

где ω — заданная частота колебаний. Из (5) находим:

$$u(M_0, t_0) = e^{i\omega t_0} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{T_{at_0}^{M_0}} f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \quad \left(k = \frac{\omega}{a}, \ r = r_{MM_0}\right). \quad (6)$$

Пусть $f_0(M)$ — локальная функция, т. е. функция, отличная от нуля только внутри некоторой области T. Если M_0 лежит вне области T и расстояние от M_0 до ближайшей точки области T равно d, то интеграл T_{at_0} равен нулю для $t_0 < d/a$. Для таких значений возмущение не успевает дойти до точки M_0. Если расстояние от M_0 до наиболее удаленной точки области T равно D, то для моментов $t_0 > D/a$ интеграл в правой части постоянен и сводится к интегралу, распространенному по всей области T. Таким образом, во всякой точке M_0, начиная с момента $t_0 = D/a$, имеют место периодические колебания с амплитудой

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_T f_0(M) \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} d\tau_M, \quad (7)$$

так что

$$u(M_0, t_0) = v(M_0) e^{i\omega t_0}.$$

Прямая подстановка выражения (6) для u (при $t_0 > D/a$) в уравнение колебаний показывает, что функция $v(M)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M) \quad (k > \omega/a), \quad (8)$$

которое мы будем в дальнейшем называть **волновым уравнением** (см. главу VII). Оно часто также называется уравнением Гельмгольца.

Рассмотрим формулу (3) для случая установившихся колебаний, когда

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

где $v(M)$ — амплитуда колебаний, удовлетворяющая волновому уравнению (8).

В этом случае имеем:

$$[u] = u\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right) = v(M) e^{i(\omega t - kr)},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = \frac{\partial v}{\partial n} e^{i(\omega t - kr)}, \quad \frac{1}{a}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = ikv(M) e^{i(\omega t - kr)},$$

$$[f] = f_0(M) e^{i(\omega t - kr)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), приходим к интегральной формуле для волнового уравнения (8):

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right] dS_M +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T f_0(M)\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\tau_M \quad (r = r_{MM_0}), \tag{9}$$

которая часто также называется формулой Кирхгоффа.

При $k=0$ ($\omega = 0$ — статический случай) формула (9) переходит в основную формулу Грина (гл. IV, § 2) для неоднородного уравнения Лапласа.

§ 3. Колебания ограниченных объемов

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны. Задача о колебании ограниченных объемов состоит в следующем:

найти решение уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - q(M)u = \rho(M)u_{tt}, \quad k > 0, \quad q \geqslant 0, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$M = M(x, y, z)$, *внутри некоторого объема* T, *ограниченного замкнутой поверхностью* Σ, *удовлетворяющее дополнительным условиям*

$$u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M) \text{ в } T + \Sigma, \tag{2}$$

$$u|_\Sigma = 0 \text{ для } t \geqslant 0. \tag{3}$$

В случае однородной среды ($k = \text{const}$, $\rho = \text{const}$) для $q = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}u_{tt} \quad \left(a^2 = \frac{k}{\rho}\right).$$

С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процесса колебаний мембраны (случай двух независимых геометрических переменных), акустических колебаний газа, электромагнитных процессов в непроводящих средах. Особое значение представляют задачи, связанные с генерацией электромагнитных колебаний в замкнутых полых резонаторах (эндовибраторы, клистроны, магнетроны и т. д.).

Заметим, что однородность граничного условия (3) не связана с ограничением общности. В самом деле, случай

$$u|_S = \mu, \tag{3'}$$