Подставляя эти выражения в формулу (3), приходим к интегральной формуле для волнового уравнения (8):

$$v(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right]dS_M+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T f_0(M)\frac{e^{-ikr}}{r}d\tau_M \quad (r=r_{MM_0}), \tag{9}$$

которая часто также называется формулой Кирхгоффа.

При $k=0$ ($\omega=0$ — статический случай) формула (9) переходит в основную формулу Грина (гл. IV, § 2) для неоднородного уравнения Лапласа.

§ 3. Колебания ограниченных объемов

1. Общая схема метода разделения переменных. Стоячие волны. Задача о колебании ограниченных объемов состоит в следующем:

найти решение уравнения

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-q(M)u=\rho(M)u_{tt},\quad k>0,\quad q\geqslant 0, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$M=M(x,y,z)$, *внутри некоторого объема* T, *ограниченного замкнутой поверхностью* Σ, *удовлетворяющее дополнительным условиям*

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad u_t(M,0)=\psi(M)\ \text{в}\ T+\Sigma, \tag{2}$$
$$u|_\Sigma=0\ \text{для}\ t\geqslant 0. \tag{3}$$

В случае однородной среды ($k=\text{const}$, $\rho=\text{const}$) для $q=0$ уравнение (1) принимает вид

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}u_{tt}\quad\left(a^2=\frac{k}{\rho}\right).$$

С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процесса колебаний мембраны (случай двух независимых геометрических переменных), акустических колебаний газа, электромагнитных процессов в непроводящих средах. Особое значение представляют задачи, связанные с генерацией электромагнитных колебаний в замкнутых полых резонаторах (эндовибраторы, клистроны, магнетроны и т. д.).

Заметим, что однородность граничного условия (3) не связана с ограничением общности. В самом деле, случай

$$u|_S=\mu, \tag{3'}$$

где μ — произвольная функция точки P поверхности S и времени t, легко сводится к случаю однородного граничного условия методом, который изложен в § 3 главы II для одного переменного и заключается в том, что рассматривается отклонение от заданной функции. Аналогично ставятся вторая и третья краевые задачи.

Будем искать решение $u(M, t)$ однородного уравнения (1) с условиями (2) и (3) методом разделения переменных. В дальнейшем мы ограничимся изложением формальной схемы решения. С этой целью рассмотрим основную вспомогательную задачу (ср. § 3 гл. II):

найти нетривиальное решение однородного уравнения

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = \rho u_{tt} \text{ в } T,\ t > 0 \quad (k > 0,\ \rho > 0,\ q \geqslant 0), \tag{1*}$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_\Sigma = 0, \tag{3}$$

представимое в виде произведения

$$u(M, t) = v(M)\, T(t). \tag{4}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (4) в (1) и разделяя, как обычно, переменные, приходим к следующим уравнениям для функции $v(M)$ и $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0, \quad v \not\equiv 0;\\ v|_\Sigma = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{6}$$

Для $v(M)$ получаем задачу на собственные значения (задачу Штурма — Лиувилля):

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0 \quad (k > 0,\ q \geqslant 0,\ \rho > 0),\\ v|_\Sigma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — **собственными функциями задачи** (5).

Остановимся подробнее на этой задаче, аналогичной основной задаче § 3 главы II. В нашем случае уравнение для собственных функций представляет собой уравнение с частными производными, вследствие чего трудно рассчитывать на получение явного представления собственных функций для произвольной области T. В дальнейшем (пп. 2 и 3) будут рассмотрены примеры областей T, для которых явное представление возможно, хотя и требует введения нового класса специальных функций. Здесь мы рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений и проведем формальную схему метода разделения переменных. Перечислим эти свойства.

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, которым соответствуют собственные функции

$$v_1(x, y, z),\ v_2(x, y, z),\ \ldots,\ v_n(x, y, z),\ \ldots$$

Собственные значения λ_n с возрастанием номера n неограниченно возрастают; $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

2. При $q \geqslant 0$ все собственные значения λ положительны:

$$\lambda_n > 0.$$

3. Собственные функции $\{v_n\}$ ортогональны между собой с весом $\rho(x, y, z)$ в области T:

$$\int\limits_T v_m(M)\, v_n(M)\, \rho(M)\, d\tau_M = 0 \qquad (m \neq n), \tag{7}$$

$$M = M(x, y, z); \quad d\tau_M = dx\, dy\, dz.$$

4. Теорема разложимости. *Произвольная функция $F(M)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию*

$$F = 0 \ \textit{на}\ \Sigma,$$

разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{v_n(M)\}$:

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M),$$

где F_n — коэффициенты разложения.

Доказательство свойств 1 и 4 основывается обычно на теории интегральных уравнений. Перейдем к доказательству свойств 2 и 3, не требующему специального математического аппарата. Докажем ортогональность собственных функций $\{v_n\}$ (свойство 3). Пусть $v_n(M)$ и $v_m(M)$ — две собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_m:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial z}\right) - q v_m + \lambda_m \rho v_m = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial z}\right) - q v_n + \lambda_n \rho v_n = 0,$$

причем $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на S. Умножая первое уравнение на $v_n(M)$ и вычитая из него второе уравнение, умноженное на $v_m(M)$, находим:

$$\iiint_T \{v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_m) - v_m \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n)\}\, d\tau + (\lambda_m - \lambda_n) \iiint_T v_n v_m \rho\, d\tau = 0.$$

Отсюда после преобразований, аналогичных тем, которые используются при выводе второй формулы Грина[1]), получаем:

$$\iint_\Sigma \left(v_n k \frac{\partial v_m}{\partial \nu} - v_m k \frac{\partial v_n}{\partial \nu}\right) d\sigma + (\lambda_m - \lambda_n) \iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0.$$

В силу граничных условий $v_m = 0$ и $v_n = 0$ на Σ,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0,$$

откуда и следует, что при $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau = 0 \qquad (m \neq n),$$

т. е. собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны между собой с весом $\rho(M)$.

При изучении аналогичной краевой задачи для одного независимого переменного

$$X'' + \lambda \rho X = 0,$$
$$X(0) = 0,$$
$$X(l) = 0$$

было доказано, что каждому собственному значению соответствует одна нормированная собственная функция. Для двух и трех независимых переменных это обстоятельство не имеет места. Как видно из примеров собственных функций прямоугольника и круга, рассмотренных ниже (пп. 2 и 3), одному и тому же собственному значению может соответствовать несколько собственных функций. Однако каждому собственному значению, как это следует из теории интегральных уравнений, может соответствовать лишь конечное число собственных функций, линейно-независимых между собой. Пусть некоторому значению

---

[1]) В эту формулу входят нормальные производные собственных функций на поверхности Σ. Обоснование этой формулы для поверхностей типа Ляпунова см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.

λ_n соответствует система линейно-независимых функций $v_n^{(1)}$, $v_n^{(2)}, \ldots, v_n^{(m)}$. Очевидно, что любая линейная комбинация этих функций

$$\bar{v}_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_n^{(i)}$$

также является собственной функцией для того же собственного значения λ_n. Пользуясь известным приемом ортогонализации[1]), можно построить функции $\bar{v}_n^{(1)}, \ldots, \bar{v}_n^{(m)}$, являющиеся линейными комбинациями исходных функций и ортогональные между собой. Таким образом, если собственные функции, соответствующие некоторому λ_n, не ортогональны между собой, то мы можем ортогонализировать их и получить новую систему собственных функций, ортогональных между собой и соответствующих тому же λ_n.

Совокупность таких систем собственных функций для разных λ_n образует ортогональную систему собственных функций рассматриваемой краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0,$$

$$v = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Число

$$\| v_n \| = \left[\iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau \right]^{1/2}$$

называется нормой собственной функции. Умножая каждую функцию v_n на $\frac{1}{\|v_n\|}$, получим систему собственных функций, нормированных к единице.

Для доказательства положительности собственных значений (свойство 2) достаточно воспользоваться первой формулой Грина

$$\iiint_T (k \operatorname{grad} v_n)^2 \, d\tau =$$
$$= -\iiint_T v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) \, d\tau + \iint_\Sigma v_n k \frac{\partial v_n}{\partial n} \, d\sigma =$$
$$= -\iiint_T q v_n^2 \, d\tau + \lambda_n \iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau.$$

Отсюда видно, что при $q \geqslant 0$ собственные значения λ_n положительны.

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.

В дальнейшем мы будем пользоваться теоремой разложимости (свойство 4), отсылая за доказательством к соответствующему разделу интегральных уравнений. Пусть

$$F(M)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M).$$

Отсюда обычным способом, используя условие ортогональности (7), находим коэффициенты разложения

$$F_n=\frac{\iiint\limits_T F(M)\,v_n(M)\,\rho\,d\tau}{\iiint\limits_T v_n^2\rho\,d\tau}. \tag{8}$$

Вернемся теперь к уравнению в частных производных. Решение уравнения

$$T_n''+\lambda_n T_n=0$$

имеет вид

$$T_n(t)=A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t,$$

так что решением нашей основной вспомогательной задачи будет произведение

$$u_n(M,t)=T_n(t)\,v_n(M)=\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t\right)v_n(M).$$

Общее решение исходной задачи с начальными данными естественно искать в виде суммы

$$u(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(M,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t\right)v_n(M). \tag{9}$$

Удовлетворяя начальным условиям (2)

$$u(M,0)=\varphi(M)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n v_n(M),$$

$$u_t(M,0)=\psi(M)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}v_n(M)$$

и пользуясь теоремой разложимости 4, находим:

$$A_n=\varphi_n,\quad B_n\sqrt{\lambda_n}=\psi_n,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ в их разложении по ортогональной с весом $\rho(M)$ системе функций $v_n(M)$. Тем самым формальное построение решения исходной задачи закончено.

Физическая интерпретация полученного решения вполне аналогична случаю одного переменного. Частные решения

$$u_n(M, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t)\, v_n(M)$$

представляют собой стоячие волны, которые могут существовать внутри ограниченного объема T.

«Профили» стоячих волн, определяемые функцией $v_n(M)$, для разных моментов времени отличаются лишь множителем пропорциональности. Линии или поверхности (соответственно для двух или трех переменных), вдоль которых $v_n(M) = 0$, называются узловыми линиями (поверхностями) стоячей волны $v_n(M)$. Точки, в которых $v_n(M)$ достигает относительных максимумов или минимумов, называются пучностями этой стоячей волны[1]). Общее решение представляется в виде бесконечной суммы таких стоячих волн. Возможность представления общего решения в виде суммы слагаемых подобного типа и означает возможность представления произвольного колебания в виде суперпозиции стоячих волн[2]).

Таким образом, задача о колебании мембран или объемов сводится по существу к нахождению соответствующих собственных функций. В пп. 2 и 3 мы рассмотрим колебания прямоугольной и круглой мембран, обращая при этом главное внимание на построение собственных функций. Как уже отмечалось выше, нахождение собственных функций в явной аналитической форме сопряжено с большими трудностями для областей более сложной формы. В случае произвольных областей для построения собственных функций могут быть использованы приближенные методы. Существуют различные приближенные методы, основанные на использовании интегральных уравнений, вариационных принципов, конечных разностей.

2. Колебания прямоугольной мембраны. Процесс колебаний плоской однородной мембраны, как было показано в главе II, § 1, описывается уравнением колебаний

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \tag{10}$$

Пусть в плоскости (x, y) расположена прямоугольная мембрана со сторонами b_1 и b_2, закрепленная по краям и возбуждаемая с помощью начального отклонения и начальной ско-

---

[1]) Если возбудить колебания мембраны, посыпанной песком, то песок из пучностей будет сбрасываться к узловым линиям, образуя при этом так называемые хладниевые фигуры, воспроизводящие узловые линии собственных функций.

[2]) Обоснованию метода разделения для случая многих переменных посвящена работа О. А. Ладыженской (ДАН СССР 85, 3 (1952)) и работа В. А. Ильина, О разрешимости смешаных задач для гиперболических и параболических уравнений, УМН 15, вып. 2 (1960).

рости. Для нахождения функции $u(x, y, t)$, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия, мы должны решить уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{10'}$$

при заданных начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и граничных условиях

$$u(0, y, t) = 0, \qquad u(b_1, y, t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \qquad u(x, b_2, t) = 0. \tag{13}$$

Мы ищем, как обычно, решение методом разделения переменных, полагая

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (10) и разделяя переменные, получаем для функции $T(t)$ уравнение

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \tag{15}$$

а для функции $v(x, y)$ — следующую краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v &= 0; \\ v(0, y) = 0, \quad v(b_1, y) &= 0; \\ v(x, 0) = 0, \quad v(x, b_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Таким образом, сама задача для собственных значений состоит в решении однородного уравнения в частных производных при однородных граничных условиях. Будем и эту задачу решать методом разделения переменных, полагая

$$v(x, y) = X(x)\, Y(y).$$

Проводя разделение переменных, получаем следующие одномерные задачи на собственные значения:

$$\left.\begin{aligned} X'' + \nu X &= 0, \\ X(0) = 0, \quad X(b_1) &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} Y'' + \mu Y &= 0, \\ Y(0) = 0, \quad Y(b_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где ν и μ — постоянные разделения переменных, связанные соотношением $\mu + \nu = \lambda$. При этом граничные условия для $X(x)$ и $Y(y)$ вытекают из соответствующих условий для функции v.

Например, из
$$v(0, y) = X(0)\,Y(y) = 0$$
следует $X(0) = 0$, так как $Y(y) \neq 0$ (мы ищем нетривиальные решения).

С решением задач, подобных (17) и (18), мы уже встречались при изучении колебаний струны. Решения уравнений (17) и (18) имеют вид
$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{b_1}x, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi}{b_2}y;$$
$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2; \qquad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2.$$

Собственным значениям
$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2,$$
таким образом, соответствуют собственные функции
$$v_{n,m} = A_{n,m}\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y,$$
где $A_{n,m}$ — некоторый постоянный множитель. Выберем его так, чтобы норма функции $v_{n,m}$ с весом 1 была равна единице
$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} v_{n,m}^2\,dx\,dy = A_{n,m}^2\int_0^{b_1}\sin^2\frac{n\pi}{b_1}x\,dx\int_0^{b_2}\sin^2\frac{m\pi}{b_2}y\,dy = 1.$$

Отсюда
$$A_{n,m} = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}.$$

Ортогональность функций $\{v_{n,m}\}$ очевидна и не нуждается в доказательстве. Следовательно, функции
$$v_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y \tag{19}$$
образуют ортонормированную систему собственных функций прямоугольной мембраны.

Число собственных функций, принадлежащих $\lambda_{n,m}$ (кратность $\lambda_{n,m}$), зависит от количества целочисленных решений n и m уравнения
$$\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2 = \lambda_{n,m}.$$

Найденная система собственных функций $v_{n,m}$ такова, что любая функция $F(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничному условию, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по $v_{n,m}$. Это утверждение можно обосновать, сославшись на теорию кратных рядов Фурье.

Покажем, что система (19) содержит все собственные функции нашей задачи о собственных значениях. Предположим, что существует собственная функция u_0, принадлежащая собственному значению λ_0. Так как функция u_0 ортогональна всем собственным функциям, принадлежащим другим значениям λ, то в ее разложении по системе (19) останется лишь конечное число членов, соответствующих собственным функциям, принадлежащим собственному значению $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. Поэтому u_0 является линейной комбинацией лишь тех функций (19), которые соответствуют $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. Таким образом, все функции прямоугольной мембраны даются формулой (19).

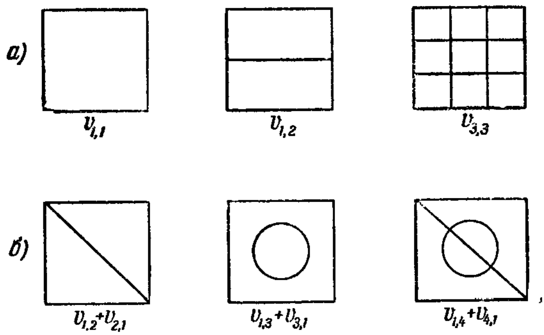

Рис. 76.

Возвращаясь к исходной задаче для уравнения (10), мы видим, что частные решения

$$u_{n,m}=v_{n,m}(x,\,y)\left(\bar{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+\bar{\bar{B}}_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)$$

представляют собой стоячие волны, профиль которых определяется собственными функциями $v_{n,m}$. Геометрические места точек внутри прямоугольника, в которых собственные функции обращаются в нуль, называются узловыми линиями. Рассмотрим для простоты квадрат со стороной $b\,(b_1=b_2)$. Узловые линии функций

$$v_{n,m}=\frac{2}{b}\sin\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

являются прямыми, параллельными осям координат (рис. 76, *а*).

При кратных собственных значениях линейная комбинация собственных функций также будет собственной функцией. Ее узловые линии могут иметь весьма сложную форму (рис. 76, *б*).

Искомое решение уравнения (10) при дополнительных условиях (11) — (13) имеет вид

$$u(x, y, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+\overline{\overline{B}}_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)v_{n,m}(x, y),$$

где $v_{n,m}$ определяется формулой (19), а коэффициенты $\overline{B}_{n,m}$ и $\overline{\overline{B}}_{n,m}$ равны:

$$\overline{B}_{n,m}=\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x, y)\,v_{n,m}(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x, y)\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy,$$

$$\overline{\overline{B}}_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda_{n,m}}}\sqrt{\frac{4}{b_1 b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\psi(x, y)\sin\frac{n\pi}{b_1}x\sin\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy.$$

3. Колебания круглой мембраны. При изучении колебаний круглой мембраны полезно перейти к полярным координатам. Тогда уравнение колебаний запишется в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u^2}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Будем искать решение этого уравнения при заданных начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(r, \theta, 0)&=f_1(r, \theta),\\ u_t(r, \theta, 0)&=f_2(r, \theta)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и граничном условии

$$u(r_0, \theta, t)=0 \tag{22}$$

(закрепленная по краям мембрана радиуса r_0). Как и в случае прямоугольной мембраны, мы прибегаем к разделению переменных. Положив

$$u(r, \theta, t)=v(r, \theta)\,T(t),$$

мы получим уравнение для $T(t)$

$$T''+a^2\lambda T=0,$$

$$T=C_1\cos\sqrt{a^2\lambda}\,t+C_2\sin\sqrt{a^2\lambda}\,t$$

и следующую задачу на собственные значения для функции $v(r, \theta)$:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\lambda v=0 & (0<r<r_0),\\ |v(0, \theta)|<\infty & \text{(условия ограниченности)},\\ v(r_0, \theta)=0 & \text{(граничное условие)},\\ v(r, \theta)=v(r, \theta+2\pi) & \text{(условие периодичности)}.\end{array}\right\}$$

Функция v должна быть однозначной и дифференцируемой функцией точки; поскольку же θ является циклической координатой, то для однозначности v мы должны потребовать, чтобы выполнялось условие периодичности с периодом 2π, т. е. $v(r, \theta+2\pi) = v(r, \theta)$.

Положим

$$v(r, \theta)=R(r)\Theta(\theta).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в наше уравнение и производя деление на $R\Theta$, получаем:

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}+\lambda r^2=0.$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\Theta''+\mu^2\Theta=0;$$

$$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi); \qquad \Theta'(\theta)=\Theta'(\theta+2\pi);$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R=0,$$

$$R(r_0)=0, \quad |R(0)|<\infty.$$

Нетривиальные периодические решения для $\Theta(\theta)$ существуют лишь при $\mu^2=n^2$ (n — целое число) и имеют вид

$$\Theta_n(\theta)=D_{1n}\cos n\theta+D_{2n}\sin n\theta.$$

Отметим, что собственному значению n^2 принадлежат две линейно-независимые собственные функции $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$.

Для определения функции $R(r)$ мы имеем уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{23}$$

с однородными граничными условиями

$$\begin{gathered}R(r_0)=0,\\ |R(0)|<\infty.\end{gathered} \tag{24}$$

Таким образом, для определения функции $R(r)$ мы должны решить задачу о собственных значениях.

Второе условие, налагаемое на функцию $R(r)$, представляющее условие ограниченности при $r = 0$, связано с тем, что $r = 0$ является особой точкой уравнения; для особых же точек в качестве граничного условия достаточно выставить требование ограниченности (см. Дополнение II, ч. I).

Вводя новую переменную

$$x = \sqrt{\lambda}\, r$$

и обозначая

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x),$$

получим для определения функции $y(x)$ уравнение цилиндрических функций n-го порядка (см. Дополнение II, ч. I)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{25}$$

с дополнительными граничными условиями

$$y(x_0) = 0 \qquad (x_0 = \sqrt{\lambda}\, r_0), \tag{26}$$

$$|y(0)| < \infty.$$

Общее решение уравнения цилиндрических функций имеет вид

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x), \tag{27}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя, N_n — функция Неймана n-го порядка (см. Дополнение II, ч. I). Из второго условия следует, что $d_2 = 0$. Первое условие дает:

$$J_n(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0 \quad \text{или} \quad J_n(\mu) = 0 \quad (\mu = \sqrt{\lambda}\, r_0). \tag{28}$$

Если $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$, то

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{29}$$

Этому собственному значению принадлежит собственная функция

$$R_{n,m} = y(\sqrt{\lambda}\, r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \tag{30}$$

Отметим следующие свойства собственных функций (30) [1]:

1. Собственные функции $R(r)$, принадлежащие различным собственным значениям λ, ортогональны с весом r:

$$\int_0^{r_0} rR_{nm_1}(r)\,R_{nm_2}(r)\,dr = 0 \qquad (m_1 \neq m_2)$$

или

$$\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)dr = 0. \tag{31}$$

2. Норма этих функций равна

$$\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J'_n(\mu_m^{(n)})\right]^2. \tag{31'}$$

В частности, норма функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$ равна

$$\int_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2 dr = \frac{r_0^2}{2}\left[J_1(\mu_m^{(0)})\right]^2. \tag{32}$$

3. Всякая непрерывная в интервале $(0,\ r_0)$ функция $f(r)$, имеющая кусочно-непрерывные первую и вторую производные и удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right), \tag{33}$$

причем коэффициенты разложения определяются формулой

$$f_m = \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} rf(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\dfrac{r_0^2}{2}\left[J'_n(\mu_m^{(n)})\right]^2}. \tag{34}$$

Возвращаясь к задаче о собственных значениях для круглой мембраны, получим для собственного значения

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$$

[1]) См. Дополнение II, ч. I, § 2.

две собственные функции

$$\bar{v}_{n,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\theta,\quad \bar{\bar{v}}_{n,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\sin n\theta. \tag{35}$$

Составив их линейную комбинацию, получим:

$$v_{n,m}(r,\ \theta)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)(A_{n,m}\cos n\theta+B_{n,m}\sin n\theta). \tag{36}$$

Вычислим норму собственной функции $v_{n,m}$; попутно получится доказательство ортогональности собственных функций, вытекающее также из общей теории. Для упрощения вычислений ограничимся собственными функциями $\bar{v}_{n,m}$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}\bar{v}_{n_1,m_1}\bar{v}_{n_2m_2}r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{r_0}J_{n_1}\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0}r\right)J_{n_2}\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0}r\right)r\,dr\int_0^{2\pi}\cos n_1\theta\cos n_2\theta\,d\theta=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при}\quad n_1\neq n_2,\\ 0 & \text{при}\quad n_1=n_2,\quad m_1\neq m_2,\\ \dfrac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2\pi & \text{при}\quad n_1=n_2=n\neq 0\quad \text{и}\quad m_1=m_2=m,\\ \dfrac{r_0^2}{2}\left[J_0'(\mu_m^{(n)})\right]^2 2\pi & \text{при}\quad n_1=n_2=0\quad \text{и}\quad m_1=m_2=m.\end{cases} \tag{37}$$

Аналогичные условия имеют место для функции

$$\bar{\bar{v}}_{n,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\sin n\theta.$$

Выражение для нормы можно записать в виде

$$\iint_{\Sigma} v_{n,m}^2\,d\sigma=\frac{r_0^2}{2}\pi\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2,\qquad (d\sigma=r\,dr\,d\theta) \tag{38}$$

где

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq 0.\end{cases}$$

Из общей теории следует, что

всякая непрерывная функция $F(r,\theta)$ с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(r,\ \theta)=\sum_{n,m}(A_{n,m}\bar{v}_{n,m}(r,\ \theta)+B_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}(r,\ \theta)) \tag{39}$$

по собственным функциям задачи о собственных значениях для круга.

Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} F(r,\theta)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\theta\, r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ B_{n,m} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} F(r,\theta)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\sin n\theta\, r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Отметим, что функция

$$v_{0,m}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$$

не зависит от θ.

Если заданная функция F зависит только от r, $F = F(r)$, то ряд, представляющий разложение F по собственным функциям, будет содержать лишь функции $v_{0,m}$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right), \tag{41}$$

где

$$A_{0,m} = \frac{\int\limits_0^{r_0} F(r)\, J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\,dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)}. \tag{42}$$

Все остальные коэффициенты $A_{n,m}$ и $B_{n,m}$ равны нулю.

Возвращаясь к исходной задаче колебания мембраны при заданном начальном отклонении и начальной скорости, можем написать ее решение в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{v}_{n,m}(r,\theta)\left(A_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + B_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right) + \\ + \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_{n,m}(r,\theta)\left(C_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + D_{n,m}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right).$$

Коэффициенты $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ определяются из начальных условий

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n, m=0}^{\infty} (A_{n,m}\bar{v}_{n,m} + C_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}) = f_1(r, \theta),$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n, m=0}^{\infty} (B_{n,m}\bar{v}_{n,m} + D_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}) \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r, \theta)$$

по формулам

$$A_{n,m} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} f_1(r, \theta) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right) \cos n\theta \, r \, dr \, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r_0\right)\right]^2},$$

$$C_{n,m} = \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} f_2(r, \theta) J_n\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}\, r\right) \sin n\theta \, r \, dr \, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r_0\right)\right]^2}.$$

Аналогичные формулы имеют место для $a\sqrt{\lambda_{n,m}}B_{n,m}$ и, соответственно, для $a\sqrt{\lambda_{n,m}}D_{n,m}$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V

1. Решить задачу с начальными данными для уравнения колебаний $u_{tt} = a^2\Delta u$ в пространстве, предполагая, что начальная скорость всюду равна нулю, а начальные отклонения $u|_{t=0} = \varphi$ имеют вид

$$\text{а)} \quad \varphi = \begin{cases} 1 & \text{внутри единичной сферы,} \\ 0 & \text{вне единичной сферы} \end{cases}$$

или

$$\text{б)} \quad \varphi = \begin{cases} A\cos\frac{\pi}{2r_0}r & \text{внутри сферы радиуса } r_0, \\ 0 & \text{вне сферы радиуса } r_0. \end{cases}$$

2. Решить задачу о колебании полупространства $z > 0$ при однородном граничном условии первого или второго рода, если заданы

а) локальное возмущение, т. е. начальная скорость и начальное отклонение в некоторой области T_0;

б) сосредоточенная сила, действующая по произвольному закону.

3. Решить ту же задачу для слоя $-l \leqslant z \leqslant l$.

4. Решить уравнение колебаний в области, представляющей собой клин, угол раствора которого равен $\pi/2$ и вообще π/n (n — целое число), если заданы однородные граничные условия первого или второго рода, а также начальная скорость и начальное отклонение.

5. Вывести аналог интегральной формулы (3) § 2 для уравнения

$$u_{tt} = a^2\,\Delta u + cu, \quad \text{где} \quad c = \text{const}.$$

Рассмотреть случай $c < 0$ и найти решение задачи с начальными данными для неоднородного уравнения. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

6. Найти функцию $u(\rho, \varphi, t)$, характеризующую колебания мембраны под действием импульса K, сосредоточенного

а) в центре круглой мембраны,

б) в произвольной точке круглой мембраны,

в) в произвольной точке прямоугольной мембраны.

7. Найти собственные частоты и собственные функции мембран, имеющих форму

а) полукруга,

б) кольца,

в) кругового сектора,

г) кольцевого сектора.

Рассмотреть первую и вторую краевые задачи.

8. Найти установившиеся колебания круглой мембраны (мембраны микрофона) под действием периодической силы, распределенной по мембране с постоянной плотностью $f = A \sin \omega t$. Решить ту же задачу, если $f = A\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)\sin \omega t$, где c — радиус мембраны.

9. Вывести уравнение распространения звука в среде, движущейся с постоянной скоростью. Преобразовать полученное уравнение, перейти к системе координат, движущейся вместе со средой.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ V

I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний

Теория упругости ставит своей целью изучение возникающих в упругих телах деформаций и движений при помощи математических методов. Возникающие под действием внешних сил деформации и движения можно характеризовать с помощью вектора смещений u, проекции которого на координатные оси x, y, z будем обозначать $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$. Эти смещения возникают в упругом теле под действием внутренних сил (напряжений), которые образуют симметрический тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} — составляющие силы (напряжения), действующей на единицу площади поверхностного элемента, перпендикулярного к оси x; аналогично τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} и τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z — компоненты напряжений, действующих на единицу площади поверхностных элементов, перпендикулярных к осям y и z.