Рассмотреть случай $c < 0$ и найти решение задачи с начальными данными для неоднородного уравнения. Дать физическую интерпретацию полученных результатов.

6. Найти функцию $u(\rho, \varphi, t)$, характеризующую колебания мембраны под действием импульса K, сосредоточенного

а) в центре круглой мембраны,

б) в произвольной точке круглой мембраны,

в) в произвольной точке прямоугольной мембраны.

7. Найти собственные частоты и собственные функции мембран, имеющих форму

а) полукруга,

б) кольца,

в) кругового сектора,

г) кольцевого сектора.

Рассмотреть первую и вторую краевые задачи.

8. Найти установившиеся колебания круглой мембраны (мембраны микрофона) под действием периодической силы, распределенной по мембране с постоянной плотностью $f = A\sin\omega t$. Решить ту же задачу, если $f = A\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)\sin\omega t$, где c — радиус мембраны.

9. Вывести уравнение распространения звука в среде, движущейся с постоянной скоростью. Преобразовать полученное уравнение, перейти к системе координат, движущейся вместе со средой.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ V

I. Приведение уравнений теории упругости к уравнениям колебаний

Теория упругости ставит своей целью изучение возникающих в упругих телах деформаций и движений при помощи математических методов. Возникающие под действием внешних сил деформации и движения можно характеризовать с помощью вектора смещений u, проекции которого на координатные оси x, y, z будем обозначать $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$. Эти смещения возникают в упругом теле под действием внутренних сил (напряжений), которые образуют симметрический тензор напряжений

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} — составляющие силы (напряжения), действующей на единицу площади поверхностного элемента, перпендикулярного к оси x; аналогично τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} и τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z — компоненты напряжений, действующих на единицу площади поверхностных элементов, перпендикулярных к осям y и z.

Компоненты σ_x, σ_y, σ_z называют **нормальными напряжениями**, а τ_{xy}, τ_{xz} и так далее называют **скалывающими напряжениями**. Рассматривая элемент объема и составляя для него уравнение движения, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X,\\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y,\\
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z,
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где ρ — объемная плотность в точке (x, y, z), X, Y, Z — составляющие внешних объемных сил. Связь напряжений, возникающих при деформации, с ее характеристиками дается законом Гука, который записывается в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x+\frac{\theta}{m-2}\right\}, &\quad \tau_{xy} &= G\gamma_{xy},\\
\sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y+\frac{\theta}{m-2}\right\}, &\quad \tau_{yz} &= G\gamma_{yz},\\
\sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z+\frac{\theta}{m-2}\right\}, &\quad \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

При этом величины

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

образуют симметрический тензор деформаций

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{pmatrix}.$$

В формулах (2) мы пользуемся следующими обозначениями: G — **модуль сдвига**, m — коэффициент, характеризующий **сжатие** тела в поперечном направлении при его удлинении в продольном направлении, $\theta=\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$.

К уравнениям (1) и (2) следует еще присоединить граничные условия (на границе заданы, например, смещения u, v, w, либо поверхностные силы и т. д.), на которых мы здесь не будем останавливаться.

Уравнения (1) и (2) образуют полную систему дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений и деформаций. Подставляя выражения для напряжений из (2) в уравнения движения (1) и учитывая соотношения (3), получаем систему уравнений для смещений

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=G\left\{\Delta u+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}+X,\\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}&=G\left\{\Delta v+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right\}+Y,\\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=G\left\{\Delta w+\frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right\}+Z.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Часто вводят вместо постоянных G и m так называемые *постоянные Ламэ* λ и μ, связанные с ними соотношениями

$$\mu=G,\qquad \lambda=\frac{2}{m-2}G.$$

Это позволяет записать предыдущую систему уравнений в виде одного векторного уравнения

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F},\tag{5}$$

где $\boldsymbol{u}$ — вектор смещения с составляющими u, v и w, $\boldsymbol{F}$ — вектор объемных сил с составляющими X, Y, Z. Уравнение (5) обычно называют уравнением Ламэ.

Покажем, что уравнения (5) могут быть сведены к волновым уравнениям для соответствующим образом выбранных функций [1]).

Произвольный вектор $\boldsymbol{F}$ всегда можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}U+\operatorname{rot}\boldsymbol{L},$$

где U — скалярный, а $\boldsymbol{L}$ — векторный потенциал.

Положим

$$\boldsymbol{u}=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{rot}\boldsymbol{A},$$

где

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\Delta\Phi+U,\qquad \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\Delta\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}.$$

Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что определенный таким способом вектор $\boldsymbol{u}$ действительно удовлетворяет уравнениям упругости (4).

Если объемные силы отсутствуют, то для потенциалов Φ и $\boldsymbol{A}$ мы получаем однородные уравнения колебаний

$$\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\Delta\Phi,\qquad \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\mu\Delta\boldsymbol{A}.$$

[1]) С. Л. Соболев, Некоторые вопросы теории распространения колебаний; Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XII, Гостехиздат, 1937.

Уравнение колебаний для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ в некоторых случаях (например, в декартовой системе координат) распадается на три скалярных уравнения. Однако вопрос о приведении уравнений упругости к отдельным скалярным уравнениям колебаний не может быть рассмотрен до конца без привлечения граничных условий, которые могут связывать разные компоненты и тем самым представлять значительные трудности для полного расщепления уравнений.

II. Уравнения электромагнитного поля

1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия. Электромагнитное поле характеризуется векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей и векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ электрической и магнитной индукции. Полная система уравнений Максвелла, связывающих эти величины, имеет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{j}$ — объемная плотность токов проводимости, $\boldsymbol{j}^{(e)}$ — плотность токов, происходящих от действия сторонних э. д. с., ρ — объемная плотность зарядов, c — скорость света в пустоте. В дальнейшем мы часто будем считать $\boldsymbol{j}^{(e)}=0$.

К этим уравнениям следует присоединить так называемые материальные уравнения поля

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}, \tag{7}$$

где ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость среды. В дальнейшем мы будем предполагать среду однородной и изотропной. В этом случае $\varepsilon=\mathrm{const}$, $\mu=\mathrm{const}$, $\sigma=\mathrm{const}$. Мы часто будем рассматривать электромагнитные процессы в пустоте, где $\varepsilon=\mu=1$, $\sigma=0$, при условии отсутствия зарядов и токов. В этом случае уравнения Максвелла упрощаются:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,$$