Уравнение колебаний для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ в некоторых случаях (например, в декартовой системе координат) распадается на три скалярных уравнения. Однако вопрос о приведении уравнений упругости к отдельным скалярным уравнениям колебаний не может быть рассмотрен до конца без привлечения граничных условий, которые могут связывать разные компоненты и тем самым представлять значительные трудности для полного расщепления уравнений.

II. Уравнения электромагнитного поля

1. Уравнения электромагнитного поля и граничные условия. Электромагнитное поле характеризуется векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ напряженностей электрического и магнитного полей и векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ электрической и магнитной индукции. Полная система уравнений Максвелла, связывающих эти величины, имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{j}$ — объемная плотность токов проводимости, $\boldsymbol{j}^{(e)}$ — плотность токов, происходящих от действия сторонних э. д. с., ρ — объемная плотность зарядов, c — скорость света в пустоте. В дальнейшем мы часто будем считать $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

К этим уравнениям следует присоединить так называемые материальные уравнения поля

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

где ε — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость среды. В дальнейшем мы будем предполагать среду однородной и изотропной. В этом случае $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$. Мы часто будем рассматривать электромагнитные процессы в пустоте, где $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, при условии отсутствия зарядов и токов. В этом случае уравнения Максвелла упрощаются:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

Уравнения (1) и (4) совместны, так как между ρ и j имеется соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0,$$

выражающее закон сохранения электрического заряда.

Законы электромагнитного поля, выраженные в дифференциальной форме уравнениями (1) — (4), могут быть выражены в интегральной форме

$$\oint_C H_s\,ds = \frac{4\pi}{c} \iint_\Sigma i_n\,d\sigma, \tag{1'}$$

$$\oint_C E_s\,ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \iint_\Sigma B_n\,d\sigma = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{2'}$$

где

$$i = j_{\text{см}} + j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} + j \tag{8}$$

— полный ток, $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t}$ — ток смещения. Интегрирование производится по контуру C и по поверхности Σ, опирающейся на этот контур; $\Phi = \iint_\Sigma B_n\,d\sigma$ — поток индукции, пронизывающий контур C. Обозначая через T некоторый замкнутый объем, а через Σ — ограничивающую его поверхность, будем иметь вместо (3) и (4)

$$\iint_\Sigma B_n\,d\sigma = 0, \tag{3'}$$

$$\iint_\Sigma D_n\,d\sigma = 4\pi \iiint_T \rho\,d\tau = 4\pi e, \tag{4'}$$

где e — полный заряд внутри объема T.

Уравнения (1′) — (4′) имеют простой физический смысл и являются математическим выражением основных опытных фактов, послуживших основанием для вывода уравнений Максвелла. Так, уравнение (1′) является обобщением известного закона Био и Савара, уравнение (2′) выражает собой закон электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (4′) может быть непосредственно выведено из закона Кулона. Уравнение (3′) является следствием замкнутости силовых линий магнитного поля.

Если среда неоднородна, то к уравнению Максвелла следует присоединить условия сопряжения. На границе раздела двух разных сред (1) и (2) должны выполняться следующие условия:

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} \tag{9}$$

(непрерывность тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{E}$),

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)} \tag{10}$$

(непрерывность тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{H}$), а также

$$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)} \tag{11}$$

(непрерывность нормальных составляющих вектора $\boldsymbol{B}$),

$$D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 E_{n_1}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \tag{12}$$

где n_1 и n_2 — нормали к поверхности раздела двух сред, причем n_1 направлена внутрь первой среды, а n_2 — внутрь второй среды, ν — поверхностная плотность зарядов. Эти условия легко получаются из уравнений (1′)—(4′).

Уравнения Максвелла вместе с граничными условиями позволяют однозначно найти электромагнитное поле в пространстве по заданному начальному состоянию поля. При этом для однозначного определения поля достаточно использовать условия (9) и (10) непрерывности тангенциальных составляющих поля.

Если электромагнитный процесс является статическим, т. е. не меняется во времени, то уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0.$$

Если, кроме того, среда не обладает проводимостью, т. е. $\sigma = 0$, то мы получаем две независимые системы уравнений для электрического и магнитного полей

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \text{ (уравнения электростатики),}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (уравнения магнитостатики).}$$

Уравнения электростатики были рассмотрены нами в главе IV и в приложениях к главе IV.

В случае однородной среды нетрудно получить уравнения для каждого из векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в отдельности. Предположим, что $\rho = 0$, $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

Применяя к уравнению (1) операцию rot, имеем:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{E},$$

откуда в силу уравнения (2) и соотношения $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H}$ получим:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

или

$$\Delta\boldsymbol{H} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \left(a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right), \tag{13}$$

так как

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

Аналогично выводится уравнение для $\boldsymbol{E}$

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

В частности, уравнению (13) или (14) будут удовлетворять компоненты E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{15}$$

где u — одна из компонент E_x, E_y, E_z или H_x, H_y, H_z.

Характер процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая ($\sigma = 0$), то мы получаем обычное уравнение колебаний

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{16}$$

т. е. электромагнитные процессы распространяются в непроводящей среде без затухания со скоростью $a = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и, в частности, в пустоте со скоростью света c.

Если среда обладает большой проводимостью и можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости, то будем иметь уравнение параболического типа

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{17}$$

В общем случае, когда токи проводимости и токи смещения одного порядка, уравнение (15) является уравнением гиперболического типа, описывающим процессы распространения с затуханием, вызываемым диссипацией энергии вследствие проводимости.

Для установившихся процессов, например, в задачах дифракции

$$u = v(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$

мы приходим к уравнению эллиптического типа

$$\Delta v + (k^2 - iq^2)\, v = 0, \tag{18}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}; \quad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \tag{19}$$

Статические поля, как было уже отмечено в главе IV, описываются уравнением Лапласа.

2. Потенциалы электромагнитного поля. Для определения электромагнитного поля мы должны найти шесть величин, являющихся составляющими векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. В ряде случаев, однако, можно свести эту задачу к отысканию четырех, а иногда и меньшего числа величин. С этой целью вводят потенциалы поля — векторный $\boldsymbol{A}$, скалярный φ — следующим образом. Рассмотрим уравнение Максвелла в однородной среде, например, в пустоте. Из уравнения (3)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

следует, что вектор $\boldsymbol{H}$ соленоидален и потому может быть представлен с помощью другого вектора $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{20}$$

Подставляя это выражение в уравнение (2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

получаем:

$$\operatorname{rot}\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right] = 0,$$

т. е. вектор $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ является потенциальным и потому может быть представлен в виде градиента некоторой скалярной функции φ

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{21}$$

откуда следует

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

Введенные таким образом векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ определены не однозначно. В самом деле, из формул (20) и (21) видно, что мы получим одни и те же поля, если заменим $\boldsymbol{A}$ и φ потенциалами

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} F, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t},$$

где F — произвольная функция. Чтобы устранить эту неопределенность, налагают на потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ дополнительное условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

называемое часто условием Лоренца. Покажем, что при выполнении этого условия потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{23}$$

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{24}$$

где ρ и $\boldsymbol{j}$ — плотности заданных зарядов и токов.

Подставляя выражения (20) и (21) в уравнение (1)

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

и пользуясь векторным тождеством

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A},$$

будем иметь

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \Delta\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$

откуда в силу условия (22) и следует уравнение (24). Подставляя затем выражение (21) в четвертое уравнение Максвелла

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{4}$$

и учитывая условие (22), получим уравнение (23) для φ.

В случае однородной проводящей среды ($\sigma \neq 0$) потенциалы вводятся с помощью соотношений

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{25}$$

$\boldsymbol{A}$ и φ связаны между собой соотношением

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c}\varphi = 0 \tag{26}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j} \tag{27}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{28}$$

к которым относится все сказанное выше по поводу уравнений (23) и (24).

Если свободных зарядов нет ($\rho \equiv 0$), то потенциал $\varphi = 0$ и векторы поля выражаются через один вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющий дополнительному условию

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0.$$

В ряде случаев электромагнитные поля можно описывать с помощью векторного потенциала, у которого отлична от нуля лишь одна компонента.

Некоторые из примеров будут рассмотрены в дальнейшем (см. также приложение I к гл. VII).

3. Электромагнитное поле осциллятора.

1. В теории излучения электромагнитных волн часто пользуются понятием осциллятора или вибратора. Это понятие тесно связано с представлением о линейных токах. Осциллятор представляет собой линейный ток бесконечно малой длины.

Рассмотрим прямолинейный ток L, сила которого меняется во времени. В простейшей модели предполагается, что сила тока неизменна по длине проводника.

Ток, постоянный по длине проводника, связан с наличием на его концах зарядов, меняющихся во времени. По аналогии с электростатическим диполем, представляющим совокупность двух зарядов $+e$ и $-e$, осциллятор можно характеризовать моментом

$$p(t) = e(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{1}$$

Сила тока в осцилляторе, очевидно, равна

$$J(t) = \dot{e}(t),$$

так что

$$\frac{dp}{dt} = J(t)\,\boldsymbol{l}. \tag{2}$$

Произведение $J(t)\boldsymbol{l} = J_0(t)$ называют моментом тока.

2. Найдем электрическое поле, возбуждаемое осциллятором с моментом

$$p = p_0 f(t) \tag{3}$$

в неограниченном пространстве, предполагая, что $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ (вакуум).

Рассмотрим задачу о возбуждении электромагнитного поля прямолинейным током L, предельным случаем которого является осциллятор.

Вне тока L электромагнитное поле определяется из уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

На линии тока L векторы поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}$ должны иметь особенность, характеризующуюся тем, что циркуляция по бесконечно малой окружности K_ε, охватывающей линию тока L, имеет следующее значение:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oint\limits_{K_\varepsilon} H_s\,ds = \frac{4\pi}{c} J, \tag{5}$$

где $J = J(t)$ — сила тока.

Из этого условия следует, что составляющая H_s на токе имеет особенность типа

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho}, \tag{6}$$

где $\rho = |\overrightarrow{M_0P}|$, M_0 — точка на линии L, P — точка на K_ε (при $\rho = \varepsilon$).

Для однозначного определения поля надо добавить начальные условия, которые мы предполагаем нулевыми.

Для решения этой задачи целесообразно ввести потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ, через которые, как мы видели (см. стр. 444), поля выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Векторный потенциал вне тока L удовлетворяет однородному уравнению колебаний

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Введем декартову систему координат, направив ось z вдоль тока $\boldsymbol{L}$. Положим

$$\boldsymbol{A} = A(x, y, z)\,\boldsymbol{z}^0,$$

где $\boldsymbol{z}^0$ — единичный вектор оси z.

Функция $A(x, y, z)$, очевидно, удовлетворяет вне линии тока L однородному уравнению колебаний

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{10}$$

Чтобы выяснить особенность вектора $\boldsymbol{A}$ на токе, воспользуемся условием (6). Из уравнения (7) следует, что

$$H_s = \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Пользуясь далее условием (6), находим, что функция $A(x, y, z)$ должна в точках линии L иметь особенность вида

$$A \approx \frac{2J}{c} \ln \rho. \tag{11}$$

Будем искать потенциал A в виде

$$A(P, t) = \int\limits_L A_1(P, M, t)\, dl_M \quad (P = P(x, y, z)), \tag{12}$$

где $A_0(P, M, t) = A_1(P, M, t)\, dl_M$ — вектор-потенциал элементарного тока осциллятора, момент которого равен $J_0 = J\, dl$.

Для того чтобы потенциал A имел нужную особенность, функция $A_0(P, M, t)$ должна иметь особенность вида

$$A_0(P, M, t) \approx \frac{J_0(t)}{cR_{PM}}. \tag{13}$$

В самом деле, предполагая, что A_0 имеет указанную особенность, и вычисляя по формуле (12) значение A вблизи тока $L (0 < z < l)$, получаем:

$$A \approx J \int\limits_0^l \frac{1}{cR_{MP}} d\zeta = \frac{J}{c} \int\limits_0^l \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln [z - \zeta + \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}] \Big|_0^l = \frac{J}{c} \ln \frac{z - l + \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \frac{(l-z)\left[-1 + 1 + \dfrac{\rho^2}{2(l-z)^2} + \ldots\right]}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2J}{c} \ln \rho + \ldots,$$

где точками обозначены члены, не обращающиеся в бесконечность при $\rho = 0$.

3. Таким образом, функция $A_0(P, M, t)$ должна удовлетворять по переменным $P(x, y, z)$, t уравнению колебаний

$$\Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

всюду, кроме точки M, а в этой точке она должна иметь особенность вида

$$A_0 \approx \frac{J_0(t)}{cR_{MP}}. \tag{15}$$

Начальные условия в силу сказанного выше — нулевые.

Решение этой задачи, как мы видели в главе V, представляется в виде запаздывающего потенциала

$$A_0(M, P, t) = \frac{J_0\left(t - \dfrac{R_{MP}}{c}\right)}{cR_{MP}}. \tag{16}$$

Как было отмечено выше, момент тока равен

$$J_0(t) = J(t)\,dl = \frac{dp}{dt} = p_0\mathring{f}(t). \tag{17}$$

Таким образом, вектор-потенциал осциллятора можно также представить в виде

$$A_0 = \frac{p_0\mathring{f}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}. \tag{18}$$

Часто вместо вектора-потенциала пользуются поляризационным потенциалом или вектором Герца $\mathbf{\Pi}$, полагая

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{19}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$ также удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

и связан со скалярным потенциалом соотношением

$$\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{21}$$

Векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются через поляризационный потенциал с помощью формул

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t}. \tag{23}$$

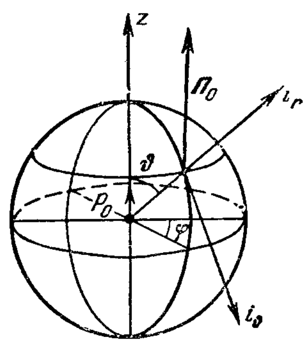

Рис. 77.

Учитывая соотношение (18), получаем следующее выражение поляризационного потенциала для осциллятора

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{p_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{или} \quad \mathbf{\Pi}_0 = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{24}$$

4. Для вычисления полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перейдем к сферической системе координат (r, ϑ, φ), в начале координат которой поместим осциллятор и направим ось $z(\vartheta = 0)$ вдоль вектора $\boldsymbol{p}_0$ (рис. 77). Обозначим $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\vartheta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$ единичные векторы сферической системы координат.

Вектор $\mathbf{\Pi}_0$, параллельный вектору $\boldsymbol{p}$, может быть представлен в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_0 &= \Pi_0\cos\vartheta\,\boldsymbol{i}_r - \Pi_0\sin\theta\,\boldsymbol{i}_\theta, \\ \Pi_0 &= |\mathbf{\Pi}_0|. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в формулы (22) и (23), пользуясь выражением дифференциального оператора $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ в сферической системе координат

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{r \sin \vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi}\right] \boldsymbol{i}_r + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin \vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi)\right] \boldsymbol{i}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}\right] \boldsymbol{i}_\varphi$$

и учитывая, что $\Pi_0 = \Pi_0(r, t)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{2\cos\vartheta}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ E_\vartheta &= \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right), \quad E_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= 0, \quad H_\vartheta = 0, \\ H_\varphi &= -\sin\vartheta \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\,\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Из уравнений (26) и (27) следует, что электрическое и магнитное поля осциллятора взаимно перпендикулярны.

5. Рассмотрим частный случай, когда момент диполя периодически зависит от времени

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}.$$

В этом случае формулы (26) и (27) дают:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 2\cos\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0, \\ E_\vartheta &= \sin\vartheta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \\ H_\varphi &= ik\sin\vartheta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\Pi_0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где

$$\Pi_0 = p_0\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}. \tag{29}$$

Исходя из формул (28), легко установить особенности строения поля осциллятора. На расстояниях, малых по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ ($kr \ll 1$), в формулах (28) можно ограничиться одним членом. Получающиеся при этом формулы для напряженности электрического поля соответствуют полю статического диполя, электрический момент которого p равен мгновенному значению момента осциллятора $p(t)$. Для напряженности магнитного поля получается выражение, соответствующее закону Био и Савара. На больших расстояниях от диполя

$R \gg \lambda$ $(kr \gg 1)$ в формуле (28) можно пренебречь всеми членами более высокого порядка, чем $1/r$. При этом получим:

$$E_r = 0, \quad E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 \sin \vartheta \Pi_0, \tag{30}$$

т. е. поле становится поперечным относительно направления распространения. Такие удаленные области поля, где поле излучения становится поперечным, называются *волновой зоной осциллятора*. Чтобы подсчитать *поток энергии* через поверхность сферы радиуса R с центром в осцилляторе, надо вычислить вектор Умова — Пойнтинга

$$S = \frac{c}{4\pi} |[\boldsymbol{EH}]| = \frac{c}{4\pi} EH$$

и проинтегрировать это выражение по сфере.

Из формул (29) и (30) следует, что в волновой зоне вещественная часть векторов H_φ и E_ϑ определяется выражением

$$H_\varphi = E_\vartheta = -\frac{\omega^2 \sin \vartheta}{c^2 r} p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

откуда

$$S = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2 c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Поток энергии через сферу радиуса R за время одного полного периода $T = 2\pi/\omega$ будет определяться выражением

$$\sum = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2 p_0^2 \omega^4}{3c^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \frac{R}{c}\right) dt$$

или

$$\sum = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}.$$

Энергия, излучаемая гармоническим осциллятором, пропорциональна четвертой степени частоты

$$\sum \sim \omega^4$$

или

$$\sum \sim \frac{1}{\lambda^4},$$

где λ — длина волны.