ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Распространение тепла в неограниченном пространстве

1. Функция температурного влияния. В главе III было показано, что процесс распространения тепла в однородном изотропном пространстве определяется уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \tag{1}$$

где $u(M, t)$ — температура точки $M(x, y, z)$ в момент t, ρ — плотность, c — коэффициент удельной теплоемкости, $k = \text{const}$ и $a^2 = k/c\rho$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности. Уравнение (1) допускает также диффузионное истолкование. В этом случае u — концентрация диффундирующего вещества, $a^2 = D$ — коэффициент диффузии.

Рассмотрим в неограниченном пространстве следующую задачу:

найти решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho} \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \quad -\infty < x,\ y,\ z < \infty,\ t > 0, \tag{2}$$

(f — плотность тепловых источников) при начальном условии

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{3}$$

Решение этой задачи может быть представлено в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 — решение однородного уравнения (1) с неоднородными начальными условиями, u_2 — решение неоднородного уравнения (2) с нулевыми начальными условиями. При изучении соответствующих одномерных задач мы видели, что для их решения достаточно определить функцию источника.

Построим функцию источника для уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве.

Предварительно докажем следующую лемму, которая будет нами использована в дальнейшем.

Если решение уравнения $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ *зависит только от* r *и* t, *то функция* $v = ru$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4}$$

В самом деле, записывая оператор Лапласа в сферической системе координат, видим, что функция $u = u(r, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

полагая затем $ru = v$, получаем для v уравнение (4)[1]).

Пусть в начале координат помещен непрерывно действующий тепловой источник постоянной мощности q, а в остальном пространстве начальная температура равна нулю

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Очевидно, что в этом случае температура u является функцией только r и t.

Наличие теплового источника при $r = 0$ означает, что тепловой поток в единицу времени через сферу S_ε (с центром в $r = 0$ и радиусом ε при $\varepsilon \to 0$ равен q, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \iint\limits_{S_\varepsilon} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right] = q.$$

Так как нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ в силу симметрии постоянна на поверхности S_ε, то

$$- k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=\varepsilon} \to q \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

что означает наличие у производной $\frac{\partial u}{\partial r}$ при $r = 0$ особенности вида $-q/4\pi k r^2$. Следовательно, сама функция при $r = 0$ должна иметь особенность вида

$$u \sim \frac{q}{4\pi k r},$$

так что произведение $ru = v$ остается ограниченным при $r = 0$.

Функция v, определяемая условиями

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0, \\ &v(r, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Сравни с п. 1 § 1 главы V.

выражается формулой

$$v(r,\ t)=v_0\left[1-\Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]=q\,\frac{1}{4\pi k}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

(см. формулу (33), гл. III, § 3). Следовательно, решение задачи о распространении температуры при непрерывно действующем источнике мощности q, помещенном в начале координат ($r=0$), имеет вид

$$u(r,\ t)=qU(r,\ t)=q\,\frac{1}{4\pi k}\,\frac{1}{r}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \tag{6}$$

где $U(r,t)$ — температура, соответствующая единичному источнику ($q=1$).

Чтобы перейти к случаю мгновенного источника, рассмотрим источник мощности q, помещенный в точку (ξ, η, ζ) и непрерывно действующий в течение промежутка времени τ.

Такой источник эквивалентен двум источникам мощности $+q$ и $-q$, первый из них включается при $t=0$, второй — при $t=\tau$. Распределение температур при этом выражается формулой

$$u_\tau(r,\ t)=q\,[U(r,\ t)-U(r,\ t-\tau)].$$

За промежуток времени τ выделяется количество тепла $Q=q\tau$, поэтому

$$u_\tau(r,\ t)=\frac{Q}{\tau}\,[U(r,\ t)-U(r,\ t-\tau)].$$

Переходя к пределу при $\tau\to 0$ и считая Q постоянным, находим:

$$u_0(r,\ t)=\lim_{\tau\to 0}u_\tau(r,\ t)=Q\,\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi kr}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\,\frac{r}{4a^2\sqrt{a^2t^3}}\,a^2$$

или

$$u_0(r,\ t)=\frac{Q}{c\rho}\,G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),$$

где

$$G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}. \tag{7}$$

Функция $G(x,\ y,\ z,\ t;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ есть **функция температурного влияния** мгновенного источника тепла. Она представляет собой температуру в точке x, y, z в момент времени t, вызываемую точечным источником мощности $Q=c\rho$, помещенным в момент $t=0$ в точку (ξ, η, ζ).

Нетрудно убедиться в том, что

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1. \tag{8}$$

В самом деле, тройной интеграл (8) можно представить в виде произведения трех интегралов, каждый из которых равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 \qquad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

Из формулы (7) видно, что функция влияния G обладает **свойством симметрии**

$$G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t; x, y, z),$$

являющимся выражением принципа взаимности: действие в точке (x, y, z) источника, находящегося в точке (ξ, η, ζ), равно действию в точке (ξ, η, ζ) такого же источника, помещенного в точку (x, y, z). Однако относительно переменной t такая симметрия не имеет места, что является выражением необратимости тепловых процессов во времени.

Определим вид функции влияния G в случае двух измерений. Пусть на прямой, параллельной оси z и проходящей через точку (ξ, η), расположен бесконечный линейный источник; обозначим через $\bar{Q} = \text{const}$ мощность источника, отнесенную к единице длины. Функция влияния G_2 такого источника не будет зависеть от z и вполне характеризуется своими значениями в плоскости (x, y). Вычислим функцию G_2. Пусть на элементе $d\zeta$ выделяется количество тепла

$$dQ = \bar{Q}\, d\zeta;$$

тогда распределение температуры в пространстве дается интегралом

$$\bar{u} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta).$$

Вычисляя интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\zeta = 2\sqrt{a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2\sqrt{\pi a^2 t} \qquad \left(\alpha = \frac{\zeta - z}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

получаем:

$$\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{c\rho} G_2,$$

где

$$G_2(x, y, t;\ \xi, \eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}. \qquad (8')$$

Сопоставляя эту функцию с формулой (7), видим их сходство по структуре.

Аналогичным способом можно получить выражение для функции источника в одномерном случае. Рассматривая бесконечный плоский источник с постоянной плотностью $\overline{\overline{Q}}$, получаем:

$$\overline{\overline{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\overline{Q}}\, d\eta\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) = \frac{\overline{\overline{Q}}}{c\rho} G_1(x, t, \xi),$$

где

$$G_1(x, t;\ \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

— функция источника для одного измерения.

В главе III были даны графики, характеризующие поведение функции влияния $G(x, t;\ \xi)$. Качественная характеристика функции источника, данная в гл. III, имеет место и для пространственного случая.

2. Распространение тепла в неограниченном пространстве. Используем теперь функцию источника, полученную в предыдущем пункте, для решения задачи о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, \quad y, z < \infty, \quad t > 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \qquad (3)$$

Начальное температурное состояние, очевидно, можно представить как результат суперпозиции действия мгновенных источников, создающих начальную температуру. Рассмотрим элемент объема $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, содержащий точку (ξ, η, ζ). Для создания начальной температуры $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, необходимо в объеме $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ поместить количество тепла $dQ = c\rho\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Это сосредоточенное количество тепла создаст в точке (x, y, z) в момент t температуру

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) = G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (9)$$

В силу принципа суперпозиции решение нашей задачи может быть получено интегрированием (9) по всему пространству

$$u(x, y, z, t) = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta)\varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (10)$$

Формула (10) получена нами в результате наводящих рассуждений, не определяющих границы ее применимости и не имеющих доказательной силы.

Докажем, что

если функция φ кусочно-непрерывна и ограничена, $|\varphi| < A$, то функция u, определяемая выражением

$$u(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \quad (10')$$

1) *ограничена во всем пространстве*: $|u| < A$;

2) *является решением уравнения теплопроводности при* $t > 0$;

3) *при* $t = 0$ *непрерывна в точках непрерывности функции* φ *и удовлетворяет условию* $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$.

Для доказательства того, что (10′) удовлетворяет уравнению (1), воспользуемся известной леммой (см. § 3 главы III).

Если $U(x, y, z, t; \xi)$ *при любом значении параметра* ξ *является решением уравнения* $\mathscr{L}(u) = 0$, *где* $\mathscr{L}(u)$ *— линейный дифференциальный оператор, то функция*

$$u(x, y, z, t) = \int U(x, y, z, t; \xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

также будет решением уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, *если производные функции* u, *входящие в оператор* $\mathscr{L}(u)$, *можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла.*

В нашем случае $U = G$ удовлетворяет уравнению теплопроводности при любых ξ, η, ζ и $t > 0$. Как известно, дифференцирование по параметру под знаком несобственного интеграла возможно, если: 1) производная по параметру от подынтегральной функции непрерывна и 2) интеграл, полученный после формального дифференцирования, равномерно сходится.

Произведя формальное дифференцирование интеграла (10′) по x, получим:

$$\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \left(-\frac{x-\xi}{2a^2 t}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}\varphi(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \quad (11)$$

Подынтегральная функция непрерывна при $\bar{t} > t > 0$, а наличие множителя $e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}}$ обеспечивает равномерную сходимость, если φ ограничено: $|\varphi| < A$. Аналогичные результаты мы получим при повторном дифференцировании по x и при дифференцировании по t; то же относится и к дифференцированию по y и z. Таким образом, функция G удовлетворяет всем условиям леммы при $t > 0$. Следовательно, функция u при $t > 0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Ограниченность функции u, определяемой формулой (10′), которую мы перепишем в виде

$$u(M, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'}$$

$$(M = M(x, y, z), \quad M' = M'(\xi, \eta, \zeta)),$$

устанавливается непосредственно, если принять во внимание равенство (8):

$$|u| < A \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G\,d\tau = A. \qquad (12)$$

Перейдем к доказательству непрерывности $u(x, y, z, t)$ при $t = 0$.

Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являющуюся точкой непрерывности функции φ, и докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t < \delta(\varepsilon). \qquad (13)$$

Построим вспомогательную область T_1, содержащую точку M_0; ее размеры будут определены ниже; остальную часть пространства обозначим через T_2. Принимая во внимание равенства

$$u(M, t) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'} + \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,\varphi(M')\,d\tau_{M'},$$

$$\varphi(M_0) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,\varphi(M_0)\,d\tau_{M'} + \varphi(M_0) \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'},$$

а также положительность функции $G(M, M', t)$, будем иметь:

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| \leqslant J_1 + J_2, \qquad (14)$$

где

$$J_1 = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\,|\varphi(M') - \varphi(M_0)|\,d\tau_{M'}, \qquad (15)$$

$$J_2 = 2A \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\,d\tau_{M'}. \qquad (16)$$

Из непрерывности функции φ в фиксированной точке M_0 следует: каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое $\delta'(\eta) > 0$, что

$$|\varphi(M') - \varphi(M_0)| < \eta, \quad \text{если} \quad |\overline{M'M_0}| < \delta'(\eta).$$

Следовательно, если диаметр области T_1 не превосходит $\delta'(\varepsilon/3)$, то

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{3} \iiint\limits_{T_1} G\, d\tau_{M'} < \frac{\varepsilon}{3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G\, d\tau = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Остановимся теперь подробно на выборе области T_1. В качестве T_1 мы можем выбрать сферу с центром в точке $M(x, y, z)$, что удобно для оценки интеграла J_2. Оценка (17) интеграла J_1 сохраняет силу, если радиус этой сферы выбрать равным

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \quad \text{и если} \quad |\overline{MM_0}| < \rho_0.$$

Переходя к сферической системе координат с центром в точке M, получаем:

$$\iiint\limits_{T_1} G\, d\tau = 4\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int\limits_0^{\rho_0} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} r^2\, dr =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{\rho_0}{2\sqrt{a^2t}}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1 \quad \left(\alpha = \frac{r}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_{T_2} G\, d\tau = 1 - \iiint\limits_{T_1} G\, d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad \overrightarrow{t\to 0},$$

т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta''(\varepsilon)$, что

$$\iiint\limits_{T_2} G\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3A},$$

и, следовательно,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

если только $t < \delta''(\varepsilon)$.

Выбирая из чисел $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $\delta''(\varepsilon)$ наименьшее и обозначая его через $\delta(\varepsilon)$, будем иметь неравенство

$$|u(M, t)-\varphi(M_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t<\delta(\varepsilon), \tag{13}$$

которое и доказывает непрерывность $u(M, t)$ при $t=0$ во всякой точке M_0 непрерывности функции $\varphi(M)$.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$u_t=a^2\Delta u+\frac{f}{c\rho}, \quad -\infty<x, y, z<\infty, \ t>0,$$

при нулевом начальном условии $u(x, y, z, 0)=0$. Рассмотрим точку (ξ, η, ζ) в момент времени $\tau<t$. Количество тепла, выделяющегося в элементе $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ за время $d\tau$ и равное

$$dQ=f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

вызывает в точке (x, y, z) в момент времени t температуру

$$\frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем написать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\int_0^t\int\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau. \tag{19}$$

На доказательстве справедливости этой формулы и выяснении условий ее применимости мы не останавливаемся.

Задачи для полупространства с однородными граничными условиями первого и второго рода решаются методом отражения.

§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах

1. Схема метода разделения переменных. Ранее мы рассматривали распространение тепла в неограниченном пространстве. При изучении распространения тепла в ограниченном теле необходимо к уравнению и начальному условию добавить условия на границе тела, которые в простейших случаях являются граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим простейшую задачу с однородным граничным условием первого рода:

найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2\Delta u \quad \text{внутри } T \quad \text{при } t>0 \tag{1}$$