Выбирая из чисел $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ и $\delta''(\varepsilon)$ наименьшее и обозначая его через $\delta(\varepsilon)$, будем иметь неравенство

$$|u(M, t)-\varphi(M_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |\overline{MM_0}|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad t<\delta(\varepsilon), \tag{13}$$

которое и доказывает непрерывность $u(M,t)$ при $t=0$ во всякой точке M_0 непрерывности функции $\varphi(M)$.

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$u_t=a^2\Delta u+\frac{f}{c\rho}, \quad -\infty<x,\ y,\ z<\infty,\ t>0,$$

при нулевом начальном условии $u(x,y,z,0)=0$. Рассмотрим точку (ξ,η,ζ) в момент времени $\tau<t$. Количество тепла, выделяющегося в элементе $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ за время $d\tau$ и равное

$$dQ=f\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau,$$

вызывает в точке (x, y, z) в момент времени t температуру

$$\frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau.$$

Пользуясь принципом суперпозиции, мы можем написать решение поставленной задачи в виде

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\int_0^t\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{c\rho}G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta, \tau)f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\tau. \tag{19}$$

На доказательстве справедливости этой формулы и выяснении условий ее применимости мы не останавливаемся.

Задачи для полупространства с однородными граничными условиями первого и второго рода решаются методом отражения.

§ 2. Распространение тепла в ограниченных телах

1. Схема метода разделения переменных. Ранее мы рассматривали распространение тепла в неограниченном пространстве. При изучении распространения тепла в ограниченном теле необходимо к уравнению и начальному условию добавить условия на границе тела, которые в простейших случаях являются граничными условиями первого, второго или третьего рода.

Рассмотрим простейшую задачу с однородным граничным условием первого рода:

найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2\Delta u \text{ внутри } T \quad \text{при } t>0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

и граничным условием

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

где Σ — граница области T.

Решение этой задачи может быть получено обычным методом разделения переменных, изложенным применительно к уравнению $u_{tt} = a^2 \Delta u$ в главе V, § 3; применение этого метода к нашей задаче проходит совершенно аналогично.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

найти нетривиальное решение уравнения

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \text{ в } T \quad \text{при } t > 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее однородному граничному условию

$$u|_{\Sigma} = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(M, t) = v(M)\, T(t) \not\equiv 0.$$

Разделяя переменные обычным способом, приходим к следующим условиям, определяющим функции $v(M)$ и $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v + \lambda v = 0 \quad &\text{в } T, \quad v(M) \not\equiv 0, \\ v = 0 \quad &\text{на } \Sigma \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{4}$$

Для функции v получаем задачу на отыскание собственных значений, с которой мы встречались при рассмотрении колебаний ограниченных объемов (см. гл. V, § 3, п. 1).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — собственные значения, а $v_1, v_2, \ldots$ $\ldots, v_n, \ldots$ — собственные функции задачи (3). Функции $\{v_n\}$ образуют ортогональную систему.

Соответствующие функции $T_n(t)$ имеют вид

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t},$$

и вспомогательная задача имеет нетривиальное решение

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M)\, e^{-a^2 \lambda_n t}. \tag{5}$$

Общее решение исходной задачи может быть представлено в виде

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n t} v_n(M). \tag{6}$$

Удовлетворяя начальному условию

$$u(M,\ 0)=\varphi(M)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \tag{7}$$

находим коэффициенты

$$C_n=\frac{\int\limits_T \varphi(M')\, v_n(M')\, d\tau_{M'}}{\|v_n\|^2},$$

где

$$\|v_n\|=\left[\int\limits_T v_n^2(M')\, d\tau_{M'}\right]^{1/2} \text{— норма функции } v_n.$$

Функция (6) и представляет решение задачи.

Уравнение

$$u_t-a^2\Delta u=f(M,\ t) \quad \left(f=\frac{F}{c\rho}\right) \tag{8}$$

при однородных граничном и начальном условиях может быть также решено методом разделения переменных.

Полагая, как обычно,

$$u(M,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, v_n(M) \tag{9}$$

и разлагая функцию $f(M, t)$ по собственным функциям $v_n(M)$

$$f(M,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, v_n(M),\quad f_n(t)=\frac{1}{\|v_n\|^2}\int\limits_T f(M',\ t)\, v_n(M')\, d\tau_{M'}, \tag{10}$$

получаем для определения $T_n(t)$ уравнение

$$T_n'+a^2\lambda_n T_n=f_n(t) \tag{11}$$

с начальным условием $T_n(0)=0$, если $u(M,0)=0$, решение которого имеет вид

$$T_n(t)=\int\limits_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Отсюда получаем:

$$u(M,\ t)=\int\limits_0^t\int\limits_T\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}\frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\|v_n\|^2}\right\} f(M',\ \tau)\, d\tau_{M'}\, d\tau. \tag{13}$$

Выражение в фигурных скобках, очевидно, соответствует функции влияния мгновенного источника мощности $Q=c\rho$, помещенного в точку M' в момент τ,

$$G(M, t, M', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\|v_n\|^2} e^{-a^2\lambda_n (t-\tau)}. \tag{14}$$

Решение первой краевой задачи $\bar{u}$ для уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями $\bar{u}|_\Sigma = \mu$ легко приводится к решению u неоднородного уравнения с однородными граничными условиями $u|_\Sigma = 0$, если положить

$$\bar{u} = u + \Phi, \tag{15}$$

где Φ — произвольная (достаточно гладкая) функция, принимающая значения μ на Σ (см. главу III, § 2). Весьма часто встречающийся случай постоянных граничных значений, $\mu_0 = \mathrm{const}$, приводится к задаче с однородными граничными условиями, если ввести функцию

$$\bar{u} = u + \mu_0 \quad (\Phi = \mathrm{const} = \mu_0),$$

представляющую отклонение от стационарного решения.

Таким образом, основная трудность при решении задач о распространении тепла в ограниченной области состоит в нахождении собственных функций и собственных значений для данной области.

Форма решения (6), полученная методом разделения переменных, удобна для исследования достаточно развитой стадии процесса при больших t. В самом деле, собственные значения λ_n для любой области быстро возрастают с номером n. Поэтому при $t > 0$ ряд быстро сходится и, начиная с некоторого момента, первый отличный от нуля член преобладает над суммой остальных членов

$$u(M, t) \approx C_1 v_1(M) e^{-a^2\lambda_1 t}. \tag{16}$$

Это соответствует тому физическому факту, что, независимо от начального распределения, начиная с некоторого момента, в теле устанавливается «регулярный» температурный режим, при котором «профиль» температуры не меняется во времени и амплитуда убывает по экспоненте с возрастанием времени. Этот факт положен в основу нестационарных методов определения коэффициента температуропроводности. В самом деле, измеряя температуру тела в произвольной точке M_0, находим, что

$$\ln|u(M_0, t)| \approx -a^2\lambda_1 t + \ln|C_1 v_1(M)|. \tag{17}$$

График этой функции изображается, начиная с некоторого момента времени, прямой линией с угловым коэффициентом $-a^2\lambda_1$. Зная величину λ_1, зависящую от формы области, можно найти коэффициент температуропроводности.

2. Остывание круглого цилиндра. Рассмотрим задачу об остывании бесконечно длинного цилиндра радиуса r_0, имеющего некоторую начальную температуру, если на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Предположим, что начальная температура не зависит от z (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Тогда, очевидно, и в дальнейшем температура не будет зависеть от z и меняется только в поперечном сечении S цилиндра. Выбирая в этом сечении полярную систему координат с полюсом, находящимся в центре круга S, мы приходим к задаче об определении функции $u(r, \varphi, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

начальному условию

$$u(r,\ \varphi,\ 0)=\Phi(r,\ \varphi) \tag{19}$$

и граничному условию

$$u(r_0,\ \varphi,\ t)=0. \tag{20}$$

Как мы видели, решение задачи такого типа может быть представлено в виде

$$u=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M), \tag{21}$$

где суммирование распространяется на все собственные функции задачи

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\lambda v=0, \quad v\neq 0,\\ v(r_0,\ \varphi)=0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эта задача на собственные значения была исследована нами при изучении колебаний круглой мембраны (см. главу V, § 3). Каждому собственному значению

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \tag{23}$$

соответствуют две собственные функции

$$\bar{v}_{nm}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\varphi \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}}_{nm}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\sin n\varphi, \tag{24}$$

квадраты нормы которых равны

$$\|\bar{v}_{nm}\|^2=\|\bar{\bar{v}}_{nm}\|^2=\pi\frac{\varepsilon_n r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2, \quad \varepsilon_n=\begin{cases}1; & n\neq 0;\\ 2; & n=0,\end{cases} \tag{25}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения

$$J_n(\mu) = 0. \tag{26}$$

Пользуясь выражениями для v и λ, получаем:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{C}_{nm} \cos n\varphi + \bar{\bar{C}}_{nm} \sin n\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{27}$$

где коэффициенты $\bar{C}_{nm}$ и $\bar{\bar{C}}_{nm}$ определяются начальной функцией

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{nm} &= \frac{\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\varphi \, r \, d\varphi \, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \bar{\bar{C}}_{nm} &= \frac{\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\varphi \, r \, d\varphi \, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2} \left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2}, \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Если начальная температура Φ зависит только от r, то двойной ряд (27) заменяется однократным рядом

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{29}$$

где

$$C_m = \frac{2\int\limits_0^{r_0} \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r \, dr}{r_0^2 \left[J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right]^2} \quad (J_1 = -J_0'), \tag{30}$$

а $\mu_m^{(0)}$ — m-й корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Остановимся подробнее на задаче об остывании равномерно нагретого цилиндра при нулевой температуре на поверхности. Если начальная температура

$$u(r, 0) = \Phi = u_0,$$

то

$$C_m = \frac{2u_0 \int\limits_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\,dr}{r_0^2 \left[J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)\right]^2} = \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)}, \tag{30'}$$

так как $\alpha J_0(\alpha) = [\alpha J_1(\alpha)]'$. Таким образом мы получаем:

$$\frac{u(r,t)}{u_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0\left(\mu_m^{(0)}\rho\right)}{\mu_m^{(0)} J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)} e^{-\left(\mu_m^{(0)}\right)^2 \theta} \quad \left(\rho = \frac{r}{r_0},\ \theta = \frac{a^2 t}{r_0^2}\right). \tag{31}$$

В таблицах цилиндрических функций (см. стр. 725, таблицу 3) даются численные значения как для корней $\mu_m^{(0)}$, так и для $J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)$.

В частности,

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}40, \quad J_1\left(\mu_1^{(0)}\right) = 0{,}52,$$

$$\mu_2^{(0)} = 5{,}52, \quad J_1\left(\mu_2^{(0)}\right) = 0{,}34.$$

Ряд (31) сходится быстро и при больших t можно ограничиться первым членом этого ряда. В частности, на оси цилиндра

$$\left.\frac{u(r,t)}{u_0}\right|_{r=0} = \frac{2}{2{,}40 \cdot 0{,}52} e^{-(2{,}40)^2\theta} = 1{,}60 e^{-5{,}76\theta} \quad \left(\theta = \frac{a^2 t}{r_0}\right). \tag{32}$$

3. Определение критических размеров. В главе III было показано, что процесс диффузии неустойчивого газа, скорость распада которого пропорциональна концентрации, приводит к уравнению

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta < 0). \tag{33}$$

Большой интерес представляют процессы диффузии при наличии *цепных реакций*. Цепные реакции характеризуются тем, что частицы диффундирующего вещества, вступая в реакцию с окружающей средой, «размножаются». Так, например, при столкновении нейтронов с «активными» ядрами урана происходит реакция деления ядер, сопровождающаяся появлением новых нейтронов, число которых больше единицы. Эти нейтроны в свою очередь вступают в реакцию с другими активными ядрами, вызывая их деление с выделением новых нейтронов и т. д. Таким образом происходит процесс размножения нейтронов, носящий характер цепной реакции.

Рассматривая описанный процесс в «диффузионном приближении», мы приходим к следующему уравнению:

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad (\beta > 0), \tag{33''}$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества (нейтронов), пропоциональных концентрации (плотности нейтронов).

Рассмотрим следующую задачу:
найти решение уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad \text{внутри } T, \tag{33}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(M, 0) = \varphi(M) \tag{34}$$

и граничному условию

$$u|_{\Sigma} = 0. \tag{35}$$

С помощью подстановки

$$u(M, t) = \bar{u}(M, t) e^{\beta t} \tag{36}$$

уравнение (33) переходит в уравнение (1); начальные и граничные условия при этом остаются неизменными. Таким образом, искомая функция u имеет вид

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(\beta - a^2\lambda_n) t} v_n(M), \tag{37}$$

где C_n определяются начальной функцией по формуле (10). В случае $\beta < 0$ (диффузия с распадом) показатели ряда (37) меньше соответствующих показателей ряда (6). Это означает, что при наличии распада убывание концентрации происходит быстрее по сравнению со случаем чистой диффузии ($\beta = 0$). В случае $\beta > 0$ (диффузия с размножением), если хотя бы один из показателей $\beta - a^2\lambda > 0$, т. е. $\beta > a^2\lambda_1$, то с течением времени будет происходить, вообще говоря ($C_1 \neq 0$), нарастание концентрации по экспоненциальному закону (цепная реакция). Величина β является характеристикой вещества (коэффициент размножения), а λ_1 существенно зависит от формы и размеров области. Будем говорить, что некоторая область $T_{\text{кр}}$ имеет при заданном β критические размеры, если $\lambda_1 = \beta/a^2$. Определим критические размеры для бесконечного слоя, цилиндра и сферы.

1. Бесконечный слой $0 \leqslant x \leqslant l$. Считая задачу одномерной, имеем (см. главу II, § 3):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Критическая толщина слоя $l_{\text{кр}}$, начиная с которой будет происходить процесс лавинного нарастания концентрации u, определяется из условия

$$l_{\text{кр}} = \frac{a\pi}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{3{,}14a}{\sqrt{\beta}} \quad (\beta > 0). \tag{38}$$

2. Бесконечный цилиндр. Считая задачу плоской, видим, что наименьшее значение λ соответствует собственной

функции, обладающей радиальной симметрией, и равно

$$\lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 \quad (\mu_1^{(0)} = 2{,}4048).$$

Отсюда для критического диаметра получаем формулу

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\mu_1^{(0)} a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{4{,}80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. Сфера. Наименьшее значение λ соответствует собственной функции, обладающей сферической симметрией, и равно

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \tag{40}$$

откуда для критического диаметра $D_{\text{кр}}$ получаем формулу

$$D_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{6{,}28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{40}$$

§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами

1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника. Для уравнения теплопроводности можно ставить краевые задачи для областей с границами, перемещающимися со временем.

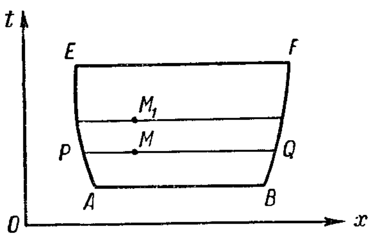

Рис. 78.

Для простоты будем рассматривать эту задачу для уравнения с одной геометрической переменной

$$\mathscr{L}(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

хотя все изложенное ниже может быть перенесено на случай многих переменных.

Рассмотрим область $BAEF$ (рис. 78), ограинченную характеристиками AB и EF ($t = \text{const}$) и кривыми, определяемыми уравнениями

$$x = \chi_1(t) \quad (\text{для } AE)$$

и

$$x = \chi_2(t) \quad (\text{для } BF).$$

Первая краевая задача для этой области состоит в определении решения уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющего начальному и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u = \varphi(x) \quad \text{на} \quad AB, \\ &u\,|_{x=\chi_1(t)} = \mu_1(t), \quad u\,|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из принципа максимального значения непосредственно следует, что эта задача не может иметь более одного непрерывного решения. Аналогично могут быть поставлены и другие краевые задачи.