функции, обладающей радиальной симметрией, и равно

$$\lambda_1^{(0)}=\left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 \quad (\mu_1^{(0)}=2{,}4048).$$

Отсюда для критического диаметра получаем формулу

$$d_{\text{кр}}=\frac{2\mu_1^{(0)}a}{\sqrt{\beta}}\approx\frac{4{,}80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. Сфера. Наименьшее значение λ соответствует собственной функции, обладающей сферической симметрией, и равно

$$\lambda_1=\left(\frac{\pi}{R}\right)^2, \tag{40}$$

откуда для критического диаметра $D_{\text{кр}}$ получаем формулу

$$D_{\text{кр}}=\frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}}\approx\frac{6{,}28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{40}$$

§ 3. Краевые задачи для областей с подвижными границами

1. Формула Грина для уравнения теплопроводности и функция источника. Для уравнения теплопроводности можно ставить краевые задачи для областей с границами, перемещающимися со временем.

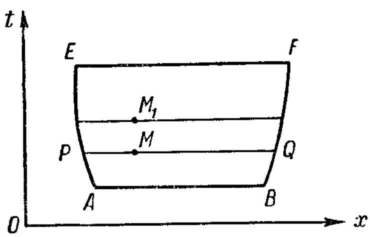

Рис. 78.

Для простоты будем рассматривать эту задачу для уравнения с одной геометрической переменной

$$\mathscr{L}(u)=a^2u_{xx}-u_t=0, \tag{1}$$

хотя все изложенное ниже может быть перенесено на случай многих переменных.

Рассмотрим область $BAEF$ (рис. 78), ограниченную характеристиками AB и EF ($t=\text{const}$) и кривыми, определяемыми уравнениями

$$x=\chi_1(t) \quad (\text{для } AE)$$

и

$$x=\chi_2(t) \quad (\text{для } BF).$$

Первая краевая задача для этой области состоит в определении решения уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющего начальному и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u=\varphi(x) \quad \text{на} \quad AB,\\ &u|_{x=\chi_1(t)}=\mu_1(t), \quad u|_{x=\chi_2(t)}=\mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из принципа максимального значения непосредственно следует, что эта задача не может иметь более одного непрерывного решения. Аналогично могут быть поставлены и другие краевые задачи.

Установим формулу Грина для уравнения (1) и интегральное представление решений этой задачи.

Рассмотрим оператор

$$\mathscr{M}(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}; \tag{3}$$

интегрируя выраженне

$$\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi) = a^2 (\psi \varphi_x - \varphi \psi_x)_x - (\varphi\psi)_t$$

по некоторой областн $PABQ$ (рис. 78), где $\varphi(x, t)$ н $\psi(x, t)$ — проязвольные, достаточное чнсло раз дифференцируемые функции, и пользуясь формулой Грина, получим:

$$\iint [\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi)]\, dx\, dt = \oint \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right],$$

где правый интеграл берется по замкнутому контуру $PABQ$. Если $\mathscr{L}(\varphi) = 0$ и $\mathscr{M}(\psi) = 0$, то, выписывая подробиее правую часть, получим:

$$\int\limits_{PQ} \varphi\psi\, dx = \int\limits_{AB} \varphi\psi\, dx + \int\limits_{BQ} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] - \\ - \int\limits_{AP} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]. \tag{4}$$

Пусть $\varphi(x, t) = u(x, t)$ — какое-либо решение уравнения теплопроводности $\mathscr{L}(u) = 0$, а $\psi = G_0(x, t, \xi, \tau)$ — функция источника для этого уравнения на неограииченной прямой

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-\tau)}}, \tag{5}$$

часто называемая **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**. Функция $G_0(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}(G_0) = 0$ по переменным x, t и сопряженному уравнению $\mathscr{M}(G_0) = 0$ по переменным ξ, τ.

Пусть $M(x, t)$ — некоторая фиксированная точка внутри области $BAEF$, в которой мы хотим определить значение функции $u(x, t)$, а M_1 — точка с координатами $x, t+h$, где $h > 0$. Проводя через точку M характерннстику PQ, замеияя в формуле (4) x на ξ, t на τ и применяя ее затем к области $ABQP$ (рис. 78) и функциям

$$\varphi = u(\xi, \tau) \quad \text{и} \quad \psi(\xi, \tau) = G_0(x, t+h, \xi, \tau), \tag{6}$$

будем иметь:

$$\int\limits_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = \\ = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G_0(x, t+h, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau\right]. \tag{7}$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ и учитывая непрерывность по h функции $G_0(x, t+h, \xi, \tau)$ и $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ на $PABQ$, а также равенство

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = u(x, t)\ ^{1)}, \tag{8}$$

если (x, t) лежит на отрезке PQ, получаем основную интегральную формулу

$$u(x,t) = \int\limits_{PABQ} u(\xi, \tau)\, G_0(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + \int\limits_{BQ+PA} a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau, \tag{9}$$

дающую представление произвольных решений уравнения теплопроводности. Перепишем ее еще раз более подробно

$$u(x,t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{BQ+PA} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau -$$
$$- a^2 \int\limits_{BQ+PA} u(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \right) d\tau. \tag{9'}$$

Эта формула не дает решений краевых задач, так как для вычисления правой части надо знать значения не только u, но и $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ вдоль дуг AE и BF.

При помощи преобразования, подобного тому, которое было выполнено для уравнения Лапласа при введении функции источника, можно исключить из этой формулы $\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Пусть v — какое-либо решение сопряженного уравнения $\mathcal{M}(v) = 0$, обращающееся в нуль на PQ, и u — решение уравнения теплопроводности $\mathcal{L}(u) = 0$. Применяя формулу (4) к функциям v и u для области $PABQ$, получим:

$$0 = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, v(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \tag{10}$$

Вычитая из (9), равенство (10), будем иметь:

$$u(x,t) = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau \right], \tag{11}$$

где

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) - v. \tag{12}$$

Если функцию v выбрать так, чтобы

$$G = 0 \quad \text{на} \quad PA \quad \text{и} \quad BQ,$$

то получим интегральное представление для $u(x, t)$ в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{AB} u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - a^2 \int\limits_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau. \tag{13}$$

---

[1] См. главу III, § 3.

Формула (13) дает решение краевой задачи (1)—(2), в условиях которой задаются значения функции u на AP и BQ, а также на прямой AB.

Остановимся подробнее на рассмотрении функции G. Она определяется при помощи представления (12), где функция $v(\xi,\tau)$ характеризуется следующими условиями:

1° $v(\xi,\tau)$ определена в области $PABQ$ и для $\tau < t$ удовлетворяет сопряженному уравнению $\mathscr{M}(v) = 0$.

2° $v = 0$ на PQ, т. е. при $\tau = t$.

3° $v(\xi,\tau) = -G_0(x,t,\xi,\tau)$ на PA и QB.

В силу этих условий функция v зависит от параметров x, t, так что $v = v(x,t,\xi,\tau)$, и для ее определения надо решить краевую задачу для уравнения $\mathscr{M}(v) = 0$, которая эквивалентна решению краевой задачи типа (2) для уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, в чем легко убедиться изменением знака у τ. Таким образом, при представлении функции $u(x,t)$ с помощью формулы (11), дающей решение краевой задачи (2), основная трудность заключается в нахождении функции $v(x,t,\xi,\tau)$.

Рассмотрим функцию $\bar{v}(x,t,\xi,\tau)$, определяемую условиями:

1° $\bar{v}(x,t,\xi,\tau)$ определена в области $PABQ$ для $t > \tau$ и, как функция переменных x,t, удовлетворяет уравнению теплопроводности $\mathscr{L}(v) = 0$.

2° $\bar{v} = 0$ на AB, т. е. при $t = \tau$.

3° $\bar{v} = -G_0$ на AP и BQ.

Докажем, что $v(x,t,\xi,\tau) = \bar{v}(x,t,\xi,\tau)$.

Рассмотрим функцию $\bar{G}(x,t,\xi,\tau) = G_0 + \bar{v}$. Очевидно, что для любого решения $\bar{u}$ уравнения $\mathscr{M}(u) = 0$ имеет место формула, аналогичная (9),

$$\bar{u}(\xi,\tau) = \int\limits_{BQPA} \bar{u}G_0\,dx + a^2\left(\bar{u}\frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)dt, \tag{9''}$$

а также формула, аналогичная (13),

$$\bar{u}(\xi,\tau) = \int\limits_{PQ} \bar{u}\bar{G}\,dx + a^2\int\limits_{BQ} \bar{u}\frac{\partial \bar{G}}{\partial x}\,dt - a^2\int\limits_{AP} \bar{u}\frac{\partial \bar{G}_0}{\partial x}\,dt. \tag{13'}$$

Эти формулы могут быть получены из формул (9) и (13) изменением знака у τ, так как при этом уравнение $\mathscr{M} = 0$ переходит в уравнение $\mathscr{L} = 0$.

Применяя формулу (13) к области $PQRS$ (рис. 79), где RS — отрезок прямой, соответствующий ординате θ, где $t > \theta > \tau$, и к непрерывному в этой области решению $u(x,t) = \bar{G}(x,t,\xi,\theta)$ уравнения $\mathscr{L}(u) = 0$, получим:

$$\bar{G}(x,t,\xi,\tau) = \int\limits_{RS} \bar{G}(x',\theta,\xi,\tau)\,G(x,t,x',\theta)\,dx',$$

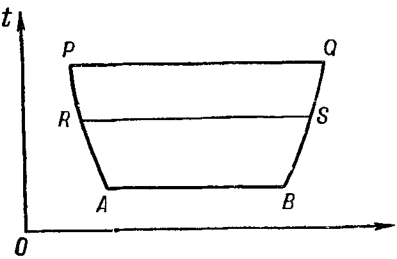

Рис. 79.

так как интегралы по RP и SQ в силу 3° равны нулю.

Применяя аналогично формулу (13′) к области $ARSB$ и непрерывному в этой области решению $\bar{u}(\xi,\tau) = G(x,t,\xi,\tau)$ уравнения $\mathscr{M}(u) = 0$, получим:

$$G(x,t,\xi,\tau) = \int\limits_{RS} G(x,t,x',\theta)\,\bar{G}(x',\theta,\xi,\tau)\,dx',$$

так как интегралы по BS и AR равны нулю. Сравнение этих формул дает, что

$$G(x, t, \xi, \tau) \equiv \bar{G}(x, t, \xi, \tau).$$

Это равенство доказывает, что функция G, рассматриваемая как функция x, t, имеет при $t = \tau$ и $x = \xi$ особенность, характерную для функции источника, равна нулю при $t = \tau$ и $x \neq \xi$, удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}_{x,t}(G) = 0$ внутри $APQB$ и обращается в нуль на AP и BQ. Такую функцию естественно назвать функцией влияния точечного источника для уравнения теплопроводности в области $APQB$.

Итак, *любое решение уравнения теплопроводности может быть представлено формулой* (13) *при помощи функции источника.*

Если задано неоднородное уравнение $\mathscr{L}(u) = f(x, t)$, то в формуле (13) к правой части следует прибавить слагаемое

$$\iint\limits_S G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

2. Решение краевой задачи. Полученная выше формула (13) дает решение краевой задачи для ограниченного отрезка с подвижными концами. Если же концы отрезка AB неподвижны, то дуги AE и BF заменяются отрезками прямых, параллельных оси t. Область S в этом случае имеет вид прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Из общей формулы (11) можно предельным переходом получить формулу Пуассона, дающую решение уравнения теплопроводности с заданным начальным условием на бесконечной прямой.

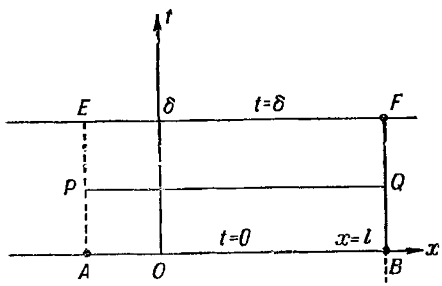

Рис. 80.

Предположим, что в части полосы, ограниченной двумя характеристиками $t = 0$ и $t = \delta$, проходящими через точки A и E (рис. 80), функции u и u_x удовлетворяют неравенствам

$$|u(x, t)|\, e^{-Kx^2} < N$$

и

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| e^{-Kx^2} < N, \tag{A}$$

где $K > 0$ и $N > 0$ — некоторые числа. Заменим дугу BQ отрезком прямой $x = l$, где l — положительное число, которое в дальнейшем будем неограниченно увеличивать. При этом мы будем исходить из формулы (9), которую перепишем в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \left[u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau - u(\xi, \tau) \frac{x-\xi}{2(t-\tau)}\, d\tau\right].$$

Рассмотрим интеграл по отрезку BQ

$$\int\limits_{BQ} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \left[a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} - u(l, \tau) \frac{x-l}{2(t-\tau)}\right] d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\, d\tau - \int\limits_0^t u(l, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}(x-l)\, d\tau}{4\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}\,(t-\tau)} = I_1 + I_2$$

и покажем, что он стремится к нулю при $l \to \infty$.

Оценим интеграл I_1 при больших значениях l

$$|I_1| \leqslant \frac{Na^2}{2\sqrt{\pi a^2}} e^{Kl^2 - \frac{l^2}{16a^2\delta}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}} \quad \left(\text{если } x < \frac{l}{2} \text{ и } (t-\tau) < \delta\right).$$

Очевидно, что $|I_1| \to 0$ при $l \to \infty$, так как K — фиксированное число, а δ может быть выбрано как угодно малым числом, например так, что

$$K < \frac{1}{16a^2\delta}.$$

Аналогично доказывается, что $|I_2| \to 0$ при $l \to \infty$.

Если для функции $u(x, t)$ и ее производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ неравенства (A) выполняются также при отрицательных x, то можно принять за кривую AE отрезок прямой $x = -l$ и, повторяя изложенные выше рассуждения, убедиться в том, что при предельном переходе интеграл по PA в формуле (9) стремится к нулю. В результате мы приходим к известной нам из главы III, § 3 формуле Пуассона [1])

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{t}} u(\xi, 0)\, d\xi.$$

Рассматривая полубесконечную область и предполагая, что для функции источника $G(x, t, \xi, \tau)$ выполнены неравенства (A), с помощью аналогичных рассуждений найдем:

$$u(x, t) = -\int_{PA} a^2\mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi = x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x, t, \xi, 0)\, d\xi, \tag{14}$$

где

$$\mu(t) = u(x_A, t) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Как нетрудно убедиться, функция источника для полубесконечной прямой $x \geqslant 0$ может быть получена методом отражения и равна

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right],$$

так как она представима в виде (12), удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным x, t и обращается в нуль при $x = 0$:

$$G(0, t, \xi, \tau) = 0.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

[1]) Приведенные рассуждения нельзя рассматривать как вывод этой формулы, так как мы основывались на ней при выводе формулы (9).

и. подставляя ее значение в (14), получим формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a^2 x}{[a^2 (t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \qquad (15)$$

которая определяет функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < \infty, \quad t > 0)$$

и дополнительным условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \mu(t) \end{aligned} \qquad (0 < x < \infty).$$

3. Функция источника для отрезка. Решение уравнения теплопроводности на ограниченном отрезке $0 < x < l$ дается формулой (11), которая после замены дуг PA и BQ отрезками прямых и сдвига начала координат в точку A принимает вид

$$G(x, t; \xi, \tau) =$$

$$= a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \mu_1(\tau)\, d\tau - a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=l} \mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^l G(x, t, \xi, 0)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

где

$$\mu_1(t) = u(0, t), \quad \mu_2(t) = u(l, t), \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

Функция источника $G(x, t, \xi, \tau)$ для отрезка может быть построена методом отражения. Помещая положительные источники в точках $2nl + \xi$ и отрицательные источники в точках $2nl - \xi$, представим функцию источника с помощью ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(x, t, 2nl + \xi, \tau) - G_0(x, t, 2nl - \xi, \tau)], \qquad (16)$$

где

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

— функция источника для неограниченной прямой.

Сходимость ряда, а также выполнение граничных условий $G|_{x=0} = 0$ и $G|_{x=l} = 0$ устанавливаются без труда.

В § 2 главы III была получена иная форма представления функции источника

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (17)$$

Докажем эквивалентность обоих представлений.

Формулу (17) можно рассматривать как разложение функции $G(x, t, \xi, \tau)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $(0, l)$

$$G(x, t, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x, t, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \tag{18}$$

Вычислим коэффициенты Фурье G_n функции G, определяемой рядом (16),

$$G_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(x, t, \xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^l G_0(x, t, 2nl + \xi_1, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi_1 \, d\xi_1 - \right.$$

$$\left. - \int_0^l G_0(x, t, 2nl - \xi_2, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi_2 \, d\xi_2 \right\}.$$

Вводя новые переменные интегрирования

$$\xi' = 2nl + \xi_1 \quad \text{и} \quad \xi'' = 2nl - \xi_2,$$

получим:

$$G_n = \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{2nl}^{(2n+1)l} G_0(x, t, \xi', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi' \, d\xi' + \right.$$

$$\left. + \int_{(2n-1)l}^{2nl} G_0(x, t, \xi'', \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi'' \, d\xi'', \right.$$

откуда следует, что

$$G_n = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t, \xi, \tau) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 (t-\tau)}} \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Введем переменную

$$\lambda = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}; \quad \sin \frac{\pi n}{l} \xi = \sin \frac{\pi n}{l} \left(x + 2\sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda \right) =$$

$$= \sin \frac{\pi n}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda + \cos \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda;$$

$$G_n = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n}{l} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda \, d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \sin \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda \, d\lambda.$$

Второй интеграл равен нулю, так как под интегралом стоит нечетная относительно начала координат функция.

Первый интеграл является частным случаем интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos \beta\lambda \, d\lambda,$$

равного

$$I(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

В нашем случае $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}$, так что

$$I = \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

и

$$G_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Подставляя найденное выражение для коэффициентов Фурье G_n в формулу (18), сразу же получаем второе представление (17) для функции источника G. Тем самым эквивалентность двух разных представлений (16) и (17) доказана.

§ 4. Тепловые потенциалы

1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя. Как мы видели, всякое решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде (рис. 79):

$$u(x, t) = \int_{AB} G_0 u \, d\xi - \int_{AP} G_0 u \, d\xi + \int_{BQ} G_0 u \, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau.$$

Займемся изучением отдельных слагаемых этой суммы и докажем в первую очередь, что каждое из них в отдельности удовлетворяет уравнению теплопроводности. Действительно, первое слагаемое является интегралом Пуассона, для которого это уже было доказано.

Докажем, что для внутренних точек области $PABQ$ уравнению теплопроводности удовлетворяют интегралы

$$V = a^2 \int_{AP} G_0 \nu \, d\tau = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2 (t-\tau)}} \nu(\tau) \, d\tau \qquad (\xi = \chi_1(\tau)),$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \mu \, d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2 (t-\tau)}} \mu(\tau) \, d\tau.$$

Функции V и W называются тепловыми потенциалами (простого слоя и двойного слоя соответственно).