Второй интеграл равен нулю, так как под интегралом стоит нечетная относительно начала координат функция.

Первый интеграл является частным случаем интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda,$$

равного

$$I(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

В нашем случае $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2\pi n}{l}\sqrt{a^2(t-\tau)}$, так что

$$I = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

и

$$G_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Подставляя найденное выражение для коэффициентов Фурье G_n в формулу (18), сразу же получаем второе представление (17) для функции источника G. Тем самым эквивалентность двух разных представлений (16) и (17) доказана.

§ 4. Тепловые потенциалы

1. Свойства тепловых потенциалов простого и двойного слоя. Как мы видели, всякое решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде (рис. 79):

$$u(x, t) = \int_{AB} G_0 u \, d\xi - \int_{AP} G_0 u \, d\xi + \int_{BQ} G_0 u \, d\xi + a^2 \int_{BQ+PA} \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \right) d\tau.$$

Займемся изучением отдельных слагаемых этой суммы и докажем в первую очередь, что каждое из них в отдельности удовлетворяет уравнению теплопроводности. Действительно, первое слагаемое является интегралом Пуассона, для которого это уже было доказано.

Докажем, что для внутренних точек области $PABQ$ уравнению теплопроводности удовлетворяют интегралы

$$V = a^2 \int_{AP} G_0 \nu \, d\tau = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau \qquad (\xi = \chi_1(\tau)),$$

$$W = 2a^2 \int_{AP} \frac{\partial G_0}{\partial \xi} \mu \, d\tau = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

Функции V и W называются тепловыми потенциалами (простого слоя и двойного слоя соответственно).

Производные функций V и W вычисляются при помощи дифференцирования под знаком интеграла, так как подстановка, входящая при дифференцировании по t, равна нулю. Например,

$$G_0(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\,\mu(\tau)\Big|_{\tau=t} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}}\,e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu(\tau)\Big|_{\tau=t} = 0$$

в силу того, что $x \neq \chi_1(t)$. Таким образом, дифференцирование по параметрам x, t будет относиться к функции G_0, которая является решением уравнения теплопроводности. Изучение остальных слагаемых проходит аналогично.

Рассмотрим теперь поведение функций V, W на кривой AP $(x = \chi_1(t))$. Очевидно, что интеграл V непрерывен при переходе точки (x, t) через кривую AP, так как этот интеграл сходится равномерно (см. главу IV, § 5). Докажем, что W претерпевает разрыв при переходе через кривую AP, причем

$$W|_{x=\chi_1(t)+0} = W|_{x=\chi_1(t)} + \mu(t),$$

$$W|_{x=\chi_1(t)-0} = W|_{x=\chi_1(t)} - \mu(t).$$

Это доказательство будет проведено в предположении дифференцируемости $\chi_1(t)$ и функции $\mu(t)$.

Рассмотрим сперва W при постоянной плотности $\mu(t) = \mu_0$

$$W^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu_0\, d\tau$$

и вспомогательный интеграл

$$\widetilde{V}^0(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\mu_0\, d\tau,$$

являющийся, в силу сделанного выше замечания, непрерывной функцией в точках дуги AP.

Разность $W^0 - \widetilde{V}^0$ вычисляется непосредственно

$$W^0(x,t) - \widetilde{V}^0(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \left[\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right]\mu_0\, d\tau =$$

$$= \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-\chi_1(t_0)}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\alpha_0} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \qquad \left(\alpha = \frac{x-\chi_1(\tau)}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}\right),$$

где

$$\alpha_0 = +\infty, \quad \text{если } x > \chi_1(t),$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \text{если } x = \chi_1(t) = x_0,$$

$$\alpha_0 = -\infty, \quad \text{если } x < \chi_1(t).$$

При $x \to x_0 \pm 0$ мы получаем:

$$[W^0(x_0 \pm 0, t) - W^0(x_0, t)] - [\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t)] = \\ = \mu_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \pm \mu_0.$$

В силу непрерывности $\tilde{V}$ имеем:

$$\tilde{V}(x_0 \pm 0, t) - \tilde{V}(x_0, t) = 0.$$

Таким образом,

$$W^0(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu_0.$$

Если $\mu(t)$ не постоянна, то

$$W(x, t) = W^0(x, t) - \psi(x, t),$$

где

$$\psi(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} [\mu(t) - \mu(\tau)]\, d\tau.$$

В силу сделанных предположений о дифференцируемости функции $\mu(t)$ этот интеграл имеет такую же особенность при $\tau = t$, как и V, сходится равномерно и является непрерывной функцией на кривой AP. Таким образом, предел $W(x, t)$ при $x = x_0 \pm 0$ равен

$$W(x_0 \pm 0, t) = W^0(x_0, t) \pm \mu,$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно убедиться, что производная $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$, подобно $W(x, t)$, разрывна при $x = x_0$. Эта производная равна

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

и равна $-W(x, t)$ с плотностью

$$\mu(t) = \frac{\nu(t)}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 \pm 0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) \pm \frac{\nu(t)}{2},$$

где интеграл

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x_0 - \chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

равен полусумме произиодных V в точке x_0 справа и слева:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 + 0, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_0 - 0, t)\right].$$

Отметим, что функция $V(x, t)$ в самой точке x_0 не имеет производной.

На этом мы заканчиваем исследование потенциалов вдоль AP. Свойства потенциалов вдоль кривой BQ совершенно аналогичны.

2. Решение краевых задач. Тепловые потенциалы являются удобным аналитическим аппаратом для решения краевых задач.

Рассмотрим сперва первую краевую задачу для полуограниченной области $x \geqslant \chi(t)$:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad x \geqslant \chi_1(t),\ t \geqslant t_0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \geqslant \chi_1(t_0);$$
$$u[\chi_1(t); t] = \mu(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(x) = 0$, так как, беря разность между $u(x, t)$ и произвольным решением уравнения теплопроводности $v(x, t)$, удовлетворяющим тому же начальному условию, получим новую функцию, для которой $\varphi(x) = 0$, а граничное значение по-прежнему будет известно.

Предполагая, что приведение к нулевому начальному условию уже сделано, представим решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2} W(x, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}(\tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x - \chi_1(t)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau;$$

эта функция удовлетворяет уравнению при $x > \chi_1(t)$, ограничена в бесконечности и имеет нулевое начальное значение при любом выборе $\bar{\mu}(t)$. При $x = \chi_1(t)$ она разрывна и ее предельное значение при $x = \chi_1(t) + 0$ должно быть равно $\mu(t)$

$$\frac{\bar{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau = \mu(t).$$

Это соотношение является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода для нахождения функции $\bar{\mu}(\tau)$, определяющей искомое решение $u(x, t)$. Существование решения всегда имеет место в силу общей теории, если кривая $x = \chi_1(t)$ определяется дифференцируемой функцией.

Это уравнение особенно просто, если граница нашей области неподвижна: $\chi_1(t) = x_0$. В этом случае интеграл обращается в нуль и

$$\bar{\mu}(t) = 2a^2 \mu(t),$$

так что искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \frac{x - x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

С этой формулой мы уже встречались дважды (см. главу III, § 3 и главу VI, § 3, п. 2), однако только здесь дано доказательство того, что эта функция удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям.

Вторая и третья краевые задачи решаются аналогично при помощи потенциала. Рассмотрим краевую задачу для ограниченной области, беря дополнительные условия в виде

$$u(x,\ 0)=\varphi(x), \qquad \chi_1(0)<x<\chi_2(0),$$
$$u[\chi_1(t);\ t]=\mu_1(t), \qquad u[\chi_2(t);\ t]=\mu_2(t) \quad (t>0).$$

Считая, что начальное значение приведено к нулю: $\varphi(x)=0$, представим решение в виде

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a^2}(W_1+W_2)=$$
$$=\int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial\xi}(x,\ t,\ \chi_1(\tau),\ \tau)\,\bar\mu_1(\tau)\,d\tau+\int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial\xi}(x,\ t,\ \chi_2(\tau),\ \tau)\,\bar\mu_2(\tau)\,d\tau.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению и нулевому начальному условию при любом выборе функции $\bar\mu_1(t)$ и $\bar\mu_2(t)$. Она разрывна при $x=\chi_1(t)$ и $x=\chi_2(t)$ и ее предельные значения при $x=\chi_1(t)+0$ и $x=\chi_2(t)-0$ должны быть равны $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, что дает систему уравнений

$$\frac{\bar\mu_1(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_1(t)-\chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\,e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\bar\mu_1(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_1(t)-\chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\,e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\bar\mu_2(\tau)\,d\tau=\mu_1(t);$$

$$-\frac{\bar\mu_2(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_2(t)-\chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\,e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\bar\mu_1(\tau)\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_2(t)-\chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\,e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\bar\mu_2(\tau)\,d\tau=\mu_2(t).$$

Эта система является системой интегральных уравнений типа Вольтерра, всегда имеющей решение.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

1. Сфера радиуса R_0 в начальный момент заполнена газом концентрации u_0; вне сферы концентрация равна нулю. Найти функцию u, характеризующую процесс диффузии газа в неограниченном пространстве. Решить ту же задачу для полупространства при наличии газонепроницаемой границы $z=0$.

2. Решить задачу о нагревании сферы радиуса R_0, если начальная температура равна нулю, а на границе поддерживается постоянная температура.

3. Найти температуру шара, на поверхности которого происходит теплообмен со средой нулевой температуры, если начальная температура постоянна и равна u_0.

4. Однородное твердое тело ограничено двумя концентрическими сферами с радиусами a и $2a$. Внутренняя поверхность тела теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

Найти распределение температуры в теле в момент t, если начальная температура тела равна u_0.

5. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью. Написать выражение для функции точечного источника в неограниченном пространстве.

6. Рассмотреть стационарную задачу диффузии в подвижной среде, считая скорость движения постоянной и пренебрегая диффузией вдоль направления движения среды (задача о газовой атаке). Написать функцию источника для полупространства, считая, что плоскость $z=0$ газонепроницаема.

7. Построить функцию теплового источника для слоя, ограниченного плоскостями $z=0$ и $z=l$, а также для клина с раствором π/n (n — целое число) при нулевых граничных условиях. Решение исследовать.

8. Найти функцию влияния мгновенного источника тепла мощности Q, равномерно распределенного на поверхности сферы радиуса a.

9. Решить задачу о нагревании бесконечного цилиндра, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности поддерживается постоянная температура. Пользуясь таблицами функций Бесселя, найти профиль температуры (взяв на радиусе десять точек) и среднюю температуру по сечению для больших моментов времени. Построить соответствующие графики.

10. Рассмотреть задачу о намагничивании бесконечного цилиндра постоянным магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Пользуясь таблицами бесселевых функций, подсчитать величину потока индукции через поперечное сечение цилиндра.

11. Построить функцию мгновенного точечного источника тепла для бесконечной цилиндрической области произвольного сечения при граничных условиях первого рода. Рассмотреть частный случай поперечного сечения круглой формы.

Указание. Представить решение в виде

$$u(M, z, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t)\,\psi_n(M),$$

где $\psi_n(M)$ — собственная функция поперечного сечения цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

I. Диффузия облака

Рассмотрим процесс диффузии газового облака, образующегося при разрыве снаряда.

При разрыве снаряда выделяется некоторое количество дыма Q, который распространяется во все стороны, образуя облако. Облако сначала растет, затем оно светлеет по краям, его темная непрозрачная часть уменьшается, все облако светлеет, начинает «таять» и, наконец, исчезает. Эта картина особенно отчетливо видна в ясный день на фоне голубого неба.

Процесс распространения дымового облака можно трактовать как процесс диффузии дыма от мгновенного точечного источника мощности Q в неограниченном пространстве. Такой процесс диффузии носит не молекулярный, а турбулентный характер; ему соответствует некоторый эффективный коэффициент