Найти распределение температуры в теле в момент t, если начальная температура тела равна u_0.

5. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью. Написать выражение для функции точечного источника в неограниченном пространстве.

6. Рассмотреть стационарную задачу диффузии в подвижной среде, считая скорость движения постоянной и пренебрегая диффузией вдоль направления движения среды (задача о газовой атаке). Написать функцию источника для полупространства, считая, что плоскость $z = 0$ газонепроницаема.

7. Построить функцию теплового источника для слоя, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = l$, а также для клина с раствором π/n (n — целое число) при нулевых граничных условиях. Решение исследовать.

8. Найти функцию влияния мгновенного источника тепла мощности Q, равномерно распределенного на поверхности сферы радиуса a.

9. Решить задачу о нагревании бесконечного цилиндра, начальная температура которого равна нулю, а на поверхности поддерживается постоянная температура. Пользуясь таблицами функций Бесселя, найти профиль температуры (взяв на радиусе десять точек) и среднюю температуру по сечению для больших моментов времени. Построить соответствующие графики.

10. Рассмотреть задачу о намагничивании бесконечного цилиндра постоянным магнитным полем, параллельным оси цилиндра. Пользуясь таблицами бесселевых функций, подсчитать величину потока индукции через поперечное сечение цилиндра.

11. Построить функцию мгновенного точечного источника тепла для бесконечной цилиндрической области произвольного сечения при граничных условиях первого рода. Рассмотреть частный случай поперечного сечения круглой формы.

Указание. Представить решение в виде

$$u(M, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t)\, \psi_n(M),$$

где $\psi_n(M)$ — собственная функция поперечного сечения цилиндра.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

I. Диффузия облака

Рассмотрим процесс диффузии газового облака, образующегося при разрыве снаряда.

При разрыве снаряда выделяется некоторое количество дыма Q, который распространяется во все стороны, образуя облако. Облако сначала растет, затем оно светлеет по краям, его темная непрозрачная часть уменьшается, все облако светлеет, начинает «таять» и, наконец, исчезает. Эта картина особенно отчетливо видна в ясный день на фоне голубого неба.

Процесс распространения дымового облака можно трактовать как процесс диффузии дыма от мгновенного точечного источника мощности Q в неограниченном пространстве. Такой процесс диффузии носит не молекулярный, а турбулентный характер; ему соответствует некоторый эффективный коэффициент турбулентной диффузии D. Мы не учитываем здесь начальный разброс дыма, а также практически совершенно не существенное влияние земли. В этих предположениях концентрация дыма дается формулой

$$u(x, y, z, t) = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \qquad (D = a^2),$$

если начало координат поместить в точку разрыва снаряда.

Остановимся на вопросе о видимости облака. Время, за которое облако полностью «растает», зависит от поглощения света в атмосфере и от порога чувствительности измерительного прибора (глаз, фотопленка и т. д.).

Как известно, интенсивность света, проходящего через однородные слои газа, приближенно равна

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

где I_0 — первоначальная интенсивность света, $\alpha = \alpha_0 u$ — коэффициент поглощения, пропорциональный концентрации поглощающего газа ($\alpha_0 = \text{const}$), u — концентрация газа в слое, l — толщина слоя.

Если имеется два слоя толщины l_1 и l_2 с разными концентрациями газа u_1 и u_2, то

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 u_1 l_1} e^{-\alpha_0 u_2 l_2} = I_0 e^{-\alpha_0 (u_1 l_1 + u_2 l_2)}.$$

Отсюда ясно, что интенсивность света, проходящего через облако с непрерывно меняющейся концентрацией дыма, будет определяться формулой

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 \int u\, dl}.$$

Видимость облака определяется отношением I/I_0, зависящим от величины $\int u\, dl$.

Пусть δ — порог чувствительности инструмента наблюдения; тогда при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} < \delta \quad \text{или} \quad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta$$

облако становится невидимым; при

$$\frac{I_0 - I}{I_0} > 1 - \delta \quad \text{или} \quad \frac{I}{I_0} < \delta$$

облако кажется совершенно непрозрачным. Если

$$\delta < \frac{I}{I_0} < 1 - \delta,$$

то облако кажется наблюдателю частично прозрачным. Степень прозрачности зависит от величины отношения

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha_0 \int u\,dl},$$

т. е. от величины интеграла $\int u\,dl$.

Направим теперь ось z по лучу зрения и будем считать, что наблюдатель находится в бесконечности. При этом облако проектируется на плоскость (x, y). Для оценки видимости различных участков облака, соответствующих точкам (x, y), вычислим интеграл

$$\int u\,dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z, t)\,dz = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\,dz = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}.$$

Если количество дыма по лучу зрения мал́о

$$\int u\,dl < \frac{\delta}{\alpha_0}, \quad \text{то} \quad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta,$$

и соответствующий участок полностью прозрачен. Если количество дыма по лучу зрения велико

$$\int u\,dl > \frac{\Delta}{\alpha_0}, \quad \text{то} \quad \frac{I}{I_0} < e^{-\Delta} = \delta,$$

т. е. при надлежащем выборе $\Delta = \ln\frac{1}{\delta}$ соответствующий участок облака совершенно непрозрачен. При

$$\frac{\delta}{\alpha_0} \leqslant \int u\,dl < \frac{\Delta}{\alpha_0}$$

условие

$$\alpha_0 \int u\,dl = \delta \quad \text{или}$$

$$\alpha_0 Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^2 e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} = \delta$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2)$$

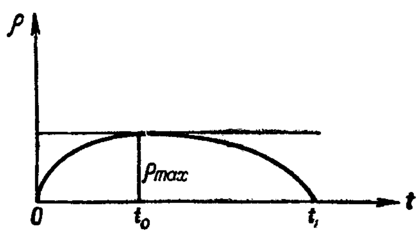

Рис. 81.

определяет границу облака, за пределами которой оно становится невидимым. Радиус облака, очевидно, равен

$$\rho = 2\sqrt{-Dt\ln\frac{\delta 4\pi D t}{Q\alpha_0}} \quad (\text{рис. } 81).$$

При малых значениях t радиус облака (ρ) мал и растет вместе с t; при

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e\delta D}$$

ρ достигает максимума

$$\rho_{\max} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e\delta}},$$

при $t > t_0$ радиус облака ρ уменьшается и при

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

обращается в нуль (облако исчезает).

Наблюдая процесс расплывания облака, можно определить коэффициент турбулентной диффузии D в свободной атмосфере (например, из формулы для t_1 или для t_0).

II. О размагничивании цилиндра с обмоткой

Рассмотрим задачу о размагничивании цилиндра с обмоткой. Такая задача возникает в связи с теорией баллистического гальванометра [1]).

При включении или выключении магнитного поля в обмотке возникает индукционный ток. При точной постановке задачи нужно учитывать обратное воздействие этого тока на поле внутри цилиндра. Однако это тормозящее действие обмотки обычно не учитывается и задачу решают с упрощенными граничными условиями.

Познакомимся, прежде всего, с такой упрощенной постановкой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса R, на поверхности которого намотана проводящая обмотка. Цилиндр находится в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси цилиндра Oz. В момент $t = 0$ поле выключается.

Внутри цилиндра, очевидно, будет удовлетворяться уравнение

$$\Delta H = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t} \quad (H = H_z), \tag{1}$$

где

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

В силу осевой симметрии поля

$$H_z = H(r, t)$$

---

[1]) Б. А. Введенский, Журнал Русского физико-химического общества 55, 1 (1923).