При малых значениях t радиус облака (ρ) мал и растет вместе с t; при

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e\delta D}$$

ρ достигает максимума

$$\rho_{\max} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e\delta}},$$

при $t > t_0$ радиус облака ρ уменьшается и при

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

обращается в нуль (облако исчезает).

Наблюдая процесс расплывания облака, можно определить коэффициент турбулентной диффузии D в свободной атмосфере (например, из формулы для t_1 или для t_0).

II. О размагничивании цилиндра с обмоткой

Рассмотрим задачу о размагничивании цилиндра с обмоткой. Такая задача возникает в связи с теорией баллистического гальванометра [1]).

При включении или выключении магнитного поля в обмотке возникает индукционный ток. При точной постановке задачи нужно учитывать обратное воздействие этого тока на поле внутри цилиндра. Однако это тормозящее действие обмотки обычно не учитывается и задачу решают с упрощенными граничными условиями.

Познакомимся, прежде всего, с такой упрощенной постановкой задачи. Рассмотрим бесконечный цилиндр радиуса R, на поверхности которого намотана проводящая обмотка. Цилиндр находится в однородном магнитном поле H_0, параллельном оси цилиндра Oz. В момент $t = 0$ поле выключается.

Внутри цилиндра, очевидно, будет удовлетворяться уравнение

$$\Delta H = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t} \quad (H = H_z), \tag{1}$$

где

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

В силу осевой симметрии поля

$$H_z = H(r, t)$$

---

[1]) Б. А. Введенский, Журнал Русского физико-химического общества 55, 1 (1923).

и уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1'}$$

Если пренебречь влиянием индукционного тока в обмотке на процесс размагничивания цилиндра, граничное условие на его поверхности будет иметь вид

$$H(R, t) = 0 \quad (t > 0). \tag{2}$$

При $t = 0$

$$H(r, 0) = H_0. \tag{2'}$$

Решение уравнения (1′) при граничном условии (2) без труда получается методом разделения переменных (см. стр. 465)

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2H_0}{\mu_k^{(0)} J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 a^2 t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Здесь J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка, $\mu_k^{(0)}$ — k-й корень уравнения

$$J_0(\mu) = 0. \tag{4}$$

Так как a^2 весьма велико, то для достаточно больших t можно ограничиться в формуле (3) первым членом (регулярный режим)

$$H(r, t) \cong 1{,}60 \cdot H_0 e^{-5{,}77 \frac{a^2}{R^2} t} J_0\left(2{,}4 \frac{r}{R}\right). \tag{5}$$

Отсюда для потока индукции получаем:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^R \mu H(r, t)\, r\, dr \cong \frac{4}{\mu_1^2} \Phi_0 e^{-\mu_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{6}$$

где Φ_0 — начальный поток (при $t = 0$), $\mu_1 = \mu^{(}{}_1$

Формулой (6) пользуются для практических расчетов при измерениях с помощью баллистического гальванометра.

Чтобы определить область применимости этой формулы, следует решить указанную выше задачу, учитывая тормозящее действие обмотки[1]).

Электродвижущая сила индукции в контуре (витке) L, как известно, равна

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = \oint_L E_l\, dL.$$

---

[1]) Эта задача была решена В. Н. Никитиной.

Преобразуем контурный интеграл, используя для этой цели теорему Стокса, второе уравнение Максвелла и уравнение (1)

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = \iint\limits_S \operatorname{rot}_z \boldsymbol{E}\, dS = -\frac{\mu}{c} \iint\limits_S \frac{\partial H}{\partial t}\, dS =$$

$$= -\frac{c}{4\pi\sigma} \iint\limits_S \Delta H\, dS = -\frac{c}{4\pi\sigma} \oint\limits_L \frac{\partial H}{\partial \nu}\, dl$$

или

$$\mathscr{E}^{\text{инд}} = -\frac{cR}{2\sigma} \frac{dH}{d\nu}(R, t). \tag{7}$$

Здесь S — поперечное сечение цилиндра, L — контур, ограничивающий S, $\boldsymbol{\nu}$ — нормаль к контуру L.

Граничные условия на поверхности цилиндра запишутся в виде условия скачка поля

$$H(R-0,\ t) - H(R+0,\ t) = \frac{4\pi}{c} nJ,$$

где J — индукционный ток в обмотке, n — число витков на единицу длины цилиндра. Отсюда, учитывая, что $H(R+0, t) = 0$,

$$J = \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{\rho l},$$

где ρ — линейное сопротивление обмотки, l — длина одного витка, получаем:

$$H(R,\ t) = H(R-0,\ t) = \frac{4\pi}{c} n \frac{\mathscr{E}^{\text{инд}}}{\rho l}. \tag{8}$$

Сопоставляя соотношения (7) и (8), окончательно приходим к граничному условию

$$H(R,\ t) + \frac{n}{\rho\sigma} H_r(R,\ t) = 0.$$

Таким образом, мы должны решить уравнение

$$H_{rr} + \frac{1}{r} H_r = \frac{1}{a^2} H_t \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$H(r,\ 0) = H_0,$$

$$H(R,\ t) + \alpha H_r(R,\ t) = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{n}{\rho\sigma}\right).$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$H(r,\ t) = X(r)\, T(t).$$

Для функции $X(r)$ и $T(t)$ получим условия

$$X'' + \frac{1}{r}X' + \lambda^2 X = 0; \tag{10}$$

$$X(R) + \alpha X'(R) = 0 \qquad (X(0) < \infty),$$

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0, \tag{11}$$

где λ^2 — параметр разделения.

Из второго уравнения сразу же находим:

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Частными решениями уравнения (10) являются функции $J_0(\lambda r)$ и $N_0(\lambda r)$ (см. Дополнение II, ч. I), однако условию ограниченности при $r = 0$ удовлетворяет лишь $J_0(\lambda r)$. Поэтому

$$X(r) = AJ_0(\lambda r).$$

Граничное условие при $r = R$ дает уравнение для определения собственных значений

$$J_0(\lambda R) + \alpha\frac{dJ_0(\lambda R)}{dR} = 0$$

или

$$J_0(y) - \beta y J_1(y) = 0,$$

где

$$\beta = \alpha/R, \quad y = \lambda R. \tag{12}$$

Корни этого уравнения могут быть найдены либо графически, либо разложением функций Бесселя в ряд по степеням $y = \lambda R$.

Обозначим y_k корни уравнения (12), так что

$$\lambda_k = y_k/R.$$

Общее решение нашей задачи будет иметь вид

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(y_k \frac{r}{R}\right) e^{-(y_k/R)^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Коэффициенты A_k находим из начального условия

$$A_k = \frac{\int\limits_0^R H_0 J_0\left(r\frac{y_k}{R}\right) r\,dr}{\int\limits_0^R J_0^2\left(r\frac{y_k}{R}\right) r\,dr} = \frac{2H_0 J_1(y_k)}{y_k\left[J_0^2(y_k) + J_1^2(y_k)\right]}. \tag{14}$$

Члены ряда (13) быстро убывают, так как $a^2 = c^2/4\pi\mu\sigma$ велико ($\sim 10^{13} - 10^{14}$). Поэтому с достаточной степенью точности можно ограничиться первым членом

$$H(r, t) \cong \frac{2H_0 J_1(y_1) J_0\left(y_1\frac{r}{R}\right)}{y_1\left[J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2\frac{a^2}{R^2}t}, \tag{15}$$

что приводит к следующему выражению для потока:

$$\Phi(t) \cong \Phi_0 \frac{4J_1^2(y_1)}{y_1^2\left[J_0^2(y_1)+J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{16}$$

где

$\Phi_0 = NH_0\pi R^2$ (N — полное число витков в обмотке).

Расчеты приводят к следующим формулам потока для различных значений параметра β:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0{,}804\, \Phi_0 e^{-4{,}75\theta} & \text{при} \quad \beta = 0{,}1, \\ 0{,}872\, \Phi_0 e^{-3{,}96\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}2, \\ 0{,}912\, \Phi_0 e^{-3{,}35\theta} & \text{»} \quad \beta = 0{,}3, \end{cases} \qquad \theta = \frac{a^2}{R^2} t,$$

позволяющим проследить за тормозящим действием тока на спадание поля в цилиндре. С увеличением β, т. е. с увеличением тока в обмотке, скорость убывания потока уменьшается. При $\beta = 0$ естественно приходим к выражению (6) для потока, являющемуся, таким образом, нулевым приближением.

В теории баллистического гальванометра важно знать время τ спадания потока от Φ_0 до значений, определяемых чувствительностью гальванометра, которое характеризует инерционность прибора. Пусть γ — относительная чувствительность гальванометра, т. е. гальванометр может регистрировать лишь значения $\Phi \geqslant \gamma\Phi_0$. Величину τ, очевидно, можно найти, полагая в формуле

$$\Phi(t) = a\Phi_0 e^{-bt},$$

$$\Phi = \gamma\Phi_0 \quad \text{в момент} \quad t = \tau.$$

Из сравнения полного решения (16) с грубым решением (6) видно, что коэффициент в формуле (6) завышен. Это означает завышенное значение чувствительности прибора при одном и том же значении τ.

Приводимая ниже таблица содержит значения τ для различных β, в том числе и для $\beta = 0$, при $\gamma = 10^{-3}$.

	R	a^2/R^2	$\tau\ (\beta=0)$	$\tau\ (\beta=0{,}1)$	$\tau\ (\beta=0{,}2)$	$\tau\ (\beta=0{,}3)$
Железо $\mu = 500$ $\sigma = 10^5$ *ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$	1 *см*	1,59	0,71	0,888	1,15	1,28
Альсифер $\mu = 2000$ $\sigma = 1{,}3 \cdot 10^4$ *ом*$^{-1}$*см*$^{-1}$	1 *см*	5,12	0,217	0,272	0,330	0,405