ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА
(продолжение)

§ 1. Основные задачи, приводящие к уравнению $\Delta v + cv = 0$

1. Установившиеся колебания. Весьма широкий класс вопросов, связанных с *установившимися колебаниями* (механическими, акустическими, электромагнитными и т. д.) приводит к так называемому *волновому уравнению*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad (k^2 = c > 0). \tag{1}$$

Рассмотрим в качестве примера мембрану S, закрепленную по границе C и колеблющуюся под действием периодических во времени сил. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\Delta_2 \bar{u} = \frac{1}{a^2} \bar{u}_{tt} - F_0(x, y) \cos \omega t. \tag{2}$$

При изучении периодических процессов удобно пользоваться комплексными функциями, заменяя (2) уравнением

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - F_0(x, y) e^{i\omega t}. \tag{3}$$

Функция $\bar{u}$, очевидно, является вещественной частью функции u из (3).

Будем искать установившиеся колебания, имеющие вид

$$u = ve^{i\omega t}. \tag{4}$$

Для амплитуды установившихся колебаний v получаем следующее уравнение:

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y) \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right), \tag{5}$$

к которому надо добавить граничное условие

$$v|_C = 0. \tag{6}$$

Если контур мембраны C не закреплен, а совершает периодические колебания с той же частотой ω

$$u|_C = f_0 e^{i\omega t}, \tag{6'}$$

то для функции v на контуре C имеет место неоднородное граничное условие

$$v|_C = f_0. \tag{6''}$$

Как было уже отмечено выше, задачи об установившихся колебаниях характерны также для акустики и теории электромагнитного поля. Кроме того, часто встречаются задачи об установившихся колебаниях в неоднородной среде, в частности, в кусочно-однородной среде (когда, например, в пространстве имеются отдельные области, нарушающие однородность). К этому кругу вопросов относятся задачи теории дифракции, на которых мы остановимся ниже.

2. Диффузия газа при наличии распада и при цепных реакциях. При диффузии некоторых газов (например, эманации радия) происходит реакция распада молекул диффундирующего газа. Скорость реакции распада обычно принимают пропорциональной концентрации газа. При написании уравнения диффузии это эквивалентно наличию отрицательных источников газа. В случае стационарного процесса диффузии мы приходим к уравнению

$$D\,\Delta v + cv = 0 \qquad (c < 0), \tag{7}$$

где D — коэффициент диффузии. Как было указано в главе VI, § 2, п. 3, большой интерес представляет случай $c > 0$, соответствующий диффузии при наличии цепных реакций, ведущих к размножению диффундирующих частиц. В стационарном случае мы получаем при этом уравнение

$$\Delta v + cv = 0 \qquad (c > 0),$$

так как цепная реакция эквивалентна наличию источников диффундирующего вещества, пропорциональных концентрации $v(x, y, z)$.

3. Диффузия в движущейся среде. В главе IV была рассмотрена задача о диффузии газа в неподвижной среде. Рассмотрим задачу о диффузии газа в заданном стационарном потоке, скорость которого в точке $M(x, y, z)$ имеет компоненты $\vartheta_1(x, y, z)$, $\vartheta_2(x, y, z)$, $\vartheta_3(x, y, z)$. Количество газа, протекающего через элементарную площадку $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$, равно

$$dQ = -Dn \operatorname{grad} u\, d\sigma + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

где $u(x, y, z)$ — концентрация газа в единице объема, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, нормальный к площадке $d\sigma$, D — коэффициент диффузии в точке (x, y, z), $\boldsymbol{\vartheta}(x, y, z)$ — вектор скорости потока.

Составляя уравнение сохранения вещества для некоторого объема T с границей Σ, получаем:

$$\int\limits_{\Sigma} [-Dn \operatorname{grad} u + u\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{n}]\, d\sigma = 0.$$

Преобразуем поверхностный интеграл в объемный, пользуясь формулой Остроградского

$$\int_T [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta)]\, d\tau = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объема T вытекает уравнение диффузии в заданном потоке

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta) = 0 \qquad (8)$$

или в скалярной форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial y}(u\vartheta_2) - \frac{\partial}{\partial z}(u\vartheta_3) = 0. \qquad (8')$$

К такому же уравнению приводит задача о распространении тепла в движущейся среде.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в полупространстве $z \geqslant 0$ имеется воздушный поток с постоянной скоростью u_0, направленной по оси x. Считая коэффициент диффузии постоянным, получаем нз (8) уравнение

$$D\,\Delta u - u_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

являющееся простейшим вариантом *уравнения газовой атаки*.

Полагая

$$u = ve^{\mu x}$$

и выбирая затем

$$\mu = u_0/2D,$$

получим для функции $v(x, y, z)$ уравнение

$$\Delta v + cv = 0, \quad \text{где} \quad c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

4. Постановка внутренних краевых задач для уравнения $\Delta v + cv = 0$. Как было показано в главе I в связи с изучением канонических форм уравнений с постоянными коэффициентами, всякое уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\Delta v + cv = 0. \qquad (9)$$

Свойства решения уравнения (9) существенно зависят от знака коэффициента c, что физически очевидно, если иметь в виду диффузионную интерпретацию этого уравнения.

Остановимся на вопросе единственности решения первой краевой задачи уравнения (9). Для уравнения $\Delta v + cv = 0$ при $c < 0$ имеет место принцип максимального значения в следующей форме:

решение $v(M)$ уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, определенное внутри некоторой области T с границей Σ, не может достигать во внутренних точках области T положительных максимальных (и отрицательных минимальных) значений.

В самом деле, допустим, что в некоторой точке M_0, лежащей внутри T, функция $v(M)$ достигает положительного максимального значения $[v(M_0) > 0]$. Тогда в точке M_0

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0$$

и, следовательно, $\Delta v \leqslant 0$, что находится в противоречии с отрицательностью коэффициента c и положительностью $v(M_0)$ [1]).

Из принципа максимального значения автоматически следует единственность решения первой краевой задачи для уравнения (9).

Может существовать только одно решение уравнения $\Delta v + cv = 0$ $(c \leqslant 0)$, определенное и непрерывное в замкнутой области $T + \Sigma$, принимающее на границе Σ заданные значения

$$v|_\Sigma = f.$$

Действительно, допуская существование двух различных решений v_1 и v_2, рассматривая их разность $v_1 - v_2$ и проводя рассуждения способом, изложенным выше (см. главы III и IV), мы приходим к противоречию с принципом максимального значения.

Если $c = 0$, то мы получаем первую краевую задачу для уравнения Лапласа, единственность решения которой была доказана.

Если $c > 0$, то единственность может не иметь места. Рассматривая в главе V задачу о собственных значениях краевой задачи

$$\Delta v + \lambda v = 0, \qquad v|_\Sigma = 0,$$

мы убедились на примерах в существовании нетривиальных решений (собственных функций) при $\lambda > 0$. Очевидно, что вопрос о множественности или единственности решения первой краевой задачи эквивалентен вопросу о том, совпадает ли c с одним из собственных значений λ_n рассматриваемой области T.

---

[1]) Сравнить с доказательством принципа максимального значения для уравнения теплопроводности.