§ 2. Функции влияния точечных источников

1. Функции влияния точечных источников. Теория потенциалов, развитая в главе IV для уравнения Лапласа, может быть распространена и на уравнение $\Delta v + cv = 0$. Для построения функций влияния точечного источника рассмотрим решение v_0, зависящее только от r. Оператор Лапласа для функции $v_0(r)$ в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right)=\frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

что приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2}+cw=0 \qquad (w=v_0r).$$

Вводя обозначение $c=k^2$ для $c>0$ и $c=-\varkappa^2$ для $c<0$, получаем:

$$\frac{d^2w}{dr^2}+k^2w=0 \qquad (c>0), \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\varkappa^2w=0 \qquad (c<0). \tag{1'}$$

Из уравнения (1) находим:

$$w=C_1e^{ikr}+C_2e^{-ikr} \tag{2}$$

и, соответственно,

$$v_0=C_1\frac{e^{ikr}}{r}+C_2\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{3}$$

В случае вещественного k получаем два линейно-независимых решения e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r, которым соответствуют вещественные линейно-независимые решения

$$\frac{\cos kr}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\sin kr}{r}.$$

При $c<0$ $(c=-\varkappa^2)$, пользуясь уравнением (1'), получаем два действительных линейно-независимых решения

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad \text{и} \quad \frac{e^{\varkappa r}}{r} \qquad (\varkappa>0). \tag{4}$$

Функции

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (c>0) \quad \text{и} \quad \frac{e^{\pm\varkappa r}}{r} \quad (c<0)$$

при $r=0$ терпят разрыв непрерывности, обращаясь в бесконечность как $1/r$. Такой же характер особенности имела функция источника для уравнения Лапласа $(c=0)$, пропорциональная $1/r$.

Рассмотрим поведение этих функций на бесконечности. Случай $c < 0$ соответствует процессу, сопровождающемуся поглощением (ср. уравнение диффузии (7) § 1). Одно из решений $e^{-\varkappa r}/r$ экспоненциально стремится к нулю на бесконечности, что в терминах задачи диффузии означает убывание концентрации, вызываемое поглощением. Это убывание происходит тем сильнее, чем больше коэффициент $|c| = \varkappa^2$, характеризующий интенсивность поглощения. Второе решение экспоненциально возрастает на бесконечности и физического смысла для задачи в неограниченной области не имеет (его можно было бы интерпретировать как наличие источника в бесконечности).

Случай $c = k^2 > 0$ соответствует установившимся волновым процессам (см. § 1, п. 1). Функция v представляет амплитуду функции

$$u(M, t) = v(M)\, e^{i\omega t},$$

удовлетворяющей уравнению колебаний (§ 1).

Одно из главных решений уравнения (1)

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r},$$

который имеет характер сферической волны, *расходящейся* от источника в точке $r = 0$. Второе решение

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

соответствует процессу колебаний

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r},$$

имеющему характер сферической волны, приходящей из бесконечности в точку $r = 0$ (*сходящиеся* волны). Очевидно, что это решение при изучении процессов, возбуждаемых точечным источником в неограниченном пространстве, прямого физического смысла не имеет.

Отметим, что функцию $v(M)$ можно рассматривать как амплитуду колебаний типа $e^{i\omega t}$ или $e^{-i\omega t}$. Мы брали временной фактор первого типа. Во втором случае расходящаяся волна имеет вид

$$u_0(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r},$$

т. е. ей соответствует второе решение

$$v_0(r)=\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Первое же решение

$$v_0(r)=\frac{e^{-ikr}}{r}$$

при этом физического смысла не имеет.

2. Интегральное представление решения. Для уравнения (9), § 1 при $c\neq 0$ можно написать формулы, аналогичные формулам Грина, которые были установлены для уравнения Лапласа. Вводя обозначение

$$\mathscr{L}(u)=\Delta u+cu, \tag{5}$$

сразу же получаем формулу

$$\int\limits_T (u\mathscr{L}(v)-v\mathscr{L}(u))\,d\tau=\int\limits_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\sigma, \tag{6}$$

являющуюся аналогом и прямым следствием второй формулы Грина (см. главу IV, § 2). Подставляя сюда вместо v одну из «функций точечного источника», например $e^{-\varkappa R}/R$, и повторяя дословно все рассуждения главы IV, § 2, приходим к аналогу основной формулы Грина

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma\left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right)-\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]d\sigma_M+\\
+\frac{1}{4\pi}\int\limits_T f(M)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\,d\tau_M\quad(R=R_{MM_0}), \tag{7}$$

где $u(M)$ — решение неоднородного уравнения $\mathscr{L}(u)=-f(M)$.

Для случая $c=k^2$ имеет место аналогичная формула

$$u(M_0)=\\
=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma\left[u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right)-\frac{e^{-ikR}}{R}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]d\sigma_M+\frac{1}{4\pi}\int\limits_T f(M)\frac{e^{-ikR}}{R}\,d\tau_M, \tag{7'}$$

которая была получена в главе V как следствие формулы Кирхгоффа.

Введем понятие функции источника уравнения $\mathscr{L}(u)=0$ для заданной области T с границей Σ. Пусть $v(M)$ — решение уравнения $\mathscr{L}(v)=0$, регулярное всюду в T. Формула (6) дает

$$0=-\int\limits_\Sigma\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\sigma+\int\limits_T fv\,d\tau. \tag{8}$$

Складывая (8) с равенством (7), получим:

$$u(M_0) = -\int\limits_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) - \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma_M +$$
$$+ \int\limits_{T} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) f(M)\, d\tau_M \qquad (R = R_{MM_0}). \qquad (9)$$

Эта формула справедлива для произвольного решения $v(M)$ уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$, регулярного в области T. Пользуясь произволом выбора функции v, получаем:

$$u(M_0) = -\int\limits_{\Sigma} u(M) \frac{\partial G(M_0, M)}{\partial \nu} d\sigma_M + \int\limits_{T} G(M_0, M) f(M)\, d\tau_M, \qquad (10)$$

где

$$G(M_0, M) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \qquad (11)$$

— функция источника, обладающая следующими свойствами:

1) $G(M, M_0)$ обращается в бесконечность при $M = M_0$ как $1/4\pi R$, что следует из формулы (11);

2) $G(M, M_0)$ удовлетворяет уравнению $\mathscr{L}(u) = 0$ всюду в T, кроме точки M_0;

3) $G(P, M_0) = 0$ в точках P, лежащих на границе Σ.

Вопрос о существовании функции источника связан с вопросом о существовании функции v, удовлетворяющей уравнению

$$\mathscr{L}(v) = 0 \text{ в } T$$

и граничному условию

$$u = -\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} \text{ на } \Sigma.$$

Очевидно, что функция $G(M, M_0)$ однозначно определена для любой области, допускающей единственное решение первой краевой задачи. В частности, при $c = -\varkappa^2 < 0$ эта функция определена для любой области. В простейших случаях функцию источника можно найти в явной форме, пользуясь методом, аналогичным методу электростатических изображений[1]).

Так, например, для полупространства $z > 0$ функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} - \frac{e^{-\varkappa R_1}}{4\pi R_1}, \qquad (12)$$

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$
$$R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2},$$

[1]) Для сферы метод электростатических изображений неприменим при $c \neq 0$.

где $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ — изображение в плоскости $z=0$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о применимости предыдущих формул для неограниченной области, что, впрочем, без труда может быть установлено в случае $c<0$. Задачи для неограниченного пространства при $c>0$ связаны с «принципом излучения» и будут рассмотрены в следующем параграфе.

Для функции источника $G(M, M_0)$, определенной для произвольной области T, имеет место принцип взаимности, выражаемый равенством

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказательство этого свойства является буквальным повторением соответствующего доказательства для случая уравнения Лапласа (глава IV, § 4).

В случае двух независимых переменных уравнение для функции $v_0(r)$ имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_0}{dr}\right) + k^2 v_0 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = 0,$$

т. е. является уравнением Бесселя нулевого порядка, общее решение которого может быть записано следующим образом (см. Дополнение II):

$$v_0(r) = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr),$$

где $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ — функции Ханкеля нулевого порядка первого и второго рода.

Функции $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ при $r=0$ имеют логарифмическую особенность:

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(1)}(\rho) &= \frac{-2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots, \\ H_0^{(2)}(\rho) &= \frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{\rho} + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (\rho = kr),$$

где точками обозначены слагаемые, остающиеся конечными при $\rho=0$. На бесконечности (при $\rho\to\infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $1/\rho$.

Таким образом, уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ имеет два фундаментальных решения

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

имеющих логарифмическую особенность и соответствующих функциям e^{ikr}/r и e^{-ikr}/r для пространства.

Выбор той или иной фундаментальной функции зависит от вида условий излучения на бесконечности (см. § 3, п. 4). Если временная зависимость берется в виде $e^{i\omega t}$, то функция $H_0^{(2)}(kr)$ определяет расходящуюся цилиндрическую волну. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$ расходящуюся волну определяет функция $H_0^{(1)}(kr)$.

Если $c = -\varkappa^2 < 0$, то линейно-независимыми решениями уравнения

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

являются цилиндрические функции мнимого аргумента

$$I_0(\varkappa r) \quad \text{и} \quad K_0(\varkappa r),$$

Первая из этих функций $I_0(\varkappa r)$ ограничена при $r = 0$ и экспоненциально возрастает при $r \to \infty$; функция $K_0(\varkappa r)$ имеет в точке $r = 0$ логарифмическую особенность

$$K_0(\rho) = \ln\frac{1}{\rho} + \ldots$$

и тем самым является искомым фундаментальным решением. На бесконечности она убывает по закону

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, e^{-\rho} + \ldots$$

Мы не останавливаемся подробно на формулах Грина и понятии функции источника G в случае двух независимых переменных, так как изложение этого было бы повторением предыдущего.

3. Потенциалы. В главе IV были рассмотрены потенциалы для уравнения $\Delta u = 0$. Такого же типа потенциалы могут быть построены и для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Будем называть о б ъ е м н ы м п о т е н ц и а л о м (для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) интеграл

$$V(M) = \int_T \rho(P)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\, d\tau_P,$$

$$R = R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{13}$$

где $\rho(P)$ — плотность потенциала.

Сформулируем кратко основные свойства объемного потенциала, доказательство которых проводится по аналогии с главой IV.

1. Вне области T функция $V(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. Внутри области T интеграл (13) сходится, сходятся также интегралы, получающиеся при помощи формального дифференцирования $V(M)$ под знаком интеграла

$$\int\limits_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

3. Функция $V(x, y, z)$ дифференцируема, и ее первые производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \text{ и т. д.}$$

Дифференцируемость функции $V(x, y, z)$ доказывается в предположении только ограниченности функции ρ. Отсюда, в частности, следует дифференцируемость V и в точках поверхности Σ, ограничивающей область T, где, как правило, имеет место разрыв плотности $\rho(M)$.

4. Во внутренних точках области T, в окрестности которых плотность ρ дифференцируема, вторые производные объемного потенциала V существуют, и потенциал V удовлетворяет уравнению

$$\Delta V - \varkappa^2 V = -4\pi\rho(M).$$

5. Первые производные объемного потенциала представляются равномерно сходящимися интегралами в предположении равномерной ограниченности ρ. Поэтому первые производные являются непрерывными функциями во всем пространстве, включая точки поверхности Σ.

Объемные потенциалы позволяют представить решение краевой задачи для неоднородного уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ в виде суммы

$$u(M) = V(M) + u_1(M),$$

где $V(M)$ — объемный потенциал с плотностью $\rho = f/4\pi$, $u_1(M)$ — решение краевой задачи для однородного уравнения $\Delta u_1 - \varkappa^2 u_1 = 0$.

Перейдем к обзору свойств потенциалов простого и двойного слоя. Назовем *потенциалом двойного слоя* интеграл

$$W(M) = \int\limits_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P \quad (R = R_{MP}), \tag{14}$$

где $\mu(P)$ — поверхностная плотность потенциала W.

Перечислим основные свойства потенциала двойного слоя, отсылая за их доказательством к главе IV § 5.

1. Вне поверхности Σ потенциал двойного слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta W - \varkappa^2 W = 0$.

2. Потенциал двойного слоя сходится в точках границы, если Σ принадлежит к классу поверхностей Ляпунова.

3. Функция W разрывна в точках поверхности Σ и имеют место соотношения

$$W_{\text{в}}(M_0) = W(M_0) + 2\pi\mu(M_0),$$
$$W_{\text{н}}(M_0) = W(M_0) - 2\pi\mu(M_0).$$

Здесь $W_{\text{в}}(M_0)$ — предельное значение функции $W(M)$ при стремлении M к M_0 изнутри области T, $W_{\text{н}}(M_0)$ — предельное значение $W(M)$ при стремлении M к M_0 снаружи T. Потенциал простого слоя, определяемый поверхностным интегралом

$$V(M) = \int\limits_{\Sigma} \rho(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{R} d\sigma_P \quad (R = R_{MP}), \tag{15}$$

обладает следующими свойствами:

1. Вне поверхности Σ потенциал простого слоя всюду удовлетворяет однородному уравнению $\Delta V - \varkappa^2 V = 0$.

2. Интеграл равномерно сходится на Σ и определяет функцию $V(M)$, непрерывную во всем пространстве.

3. Нормальные производные потенциала простого слоя для поверхностей класса Ляпунова удовлетворяют соотношениям (ср. (48), § 5 главы IV)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{в}} = U_0 + 2\pi\rho(M_0),$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{н}} = U_0 - 2\pi\rho(M_0),$$

где

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{в}} \text{ и } \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_{\text{н}}$$

— предельные значения для нормальной производной изнутри и, соответственно, извне Σ в точке M_0 на поверхности Σ (ν — внешняя нормаль)

$$U_0(M_0) = \int\limits_{\Sigma} \rho(P) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P \quad (R = R_{M_0P}).$$

Поверхностные потенциалы позволяют для весьма широкого класса поверхностей (например, поверхностей класса Ляпунова) сводить краевые задачи к интегральным уравнениям.

Рассмотрим первую внутреннюю краевую задачу для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ при граничном значении $u|_\Sigma = f$. Предположим, что искомую функцию можно представить в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = W(M) = \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P, \tag{14}$$

который, как было отмечено выше, удовлетворяет внутри T однородному уравнению $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$. Требуя выполнения граничного условия $u|_\Sigma = f$, приходим к следующему интегральному уравнению для определения функции μ:

$$2\pi\mu(M) + \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P = f(M),$$

которое является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. На вопросах существования и единственности решения этого интегрального уравнения мы здесь не останавливаемся.

Для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, так же как и для уравнения Лапласа, применим метод конечных разностей.

§ 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения

1. Уравнение $\Delta v + cv = -f$ в неограниченном пространстве. Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$\Delta v + cv = -f \tag{1}$$

в неограниченном пространстве. Для простоты изложения будем считать, что f отлична от нуля внутри некоторой ограниченной области (локальная функция). Характер решения этого уравнения существенно зависит от знака коэффициента c.

Остановимся сперва на случае $c = -\varkappa^2 < 0$. Решение уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = -f$ можно представить в форме объемных потенциалов

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}).$$

Таким образом, решение уравнения (1) без дополнительных условий в бесконечности определено неоднозначно. Будем искать, по аналогии с внешней задачей для уравнения Лапласа,