Поверхностные потенциалы позволяют для весьма широкого класса поверхностей (например, поверхностей класса Ляпунова) сводить краевые задачи к интегральным уравнениям.

Рассмотрим первую внутреннюю краевую задачу для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ при граничном значении $u|_\Sigma = f$. Предположим, что искомую функцию можно представить в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = W(M) = \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\sigma_P, \tag{14}$$

который, как было отмечено выше, удовлетворяет внутри T однородному уравнению $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$. Требуя выполнения граничного условия $u|_\Sigma = f$, приходим к следующему интегральному уравнению для определения функции μ:

$$2\pi\mu(M) + \int_\Sigma \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\sigma_P = f(M),$$

которое является линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. На вопросах существования и единственности решения этого интегрального уравнения мы здесь не останавливаемся.

Для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, так же как и для уравнения Лапласа, применим метод конечных разностей.

§ 3. Задачи для неограниченной области. Принцип излучения

1. Уравнение $\Delta v + cv = -f$ в неограниченном пространстве. Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$\Delta v + cv = -f \tag{1}$$

в неограниченном пространстве. Для простоты изложения будем считать, что f отлична от нуля внутри некоторой ограниченной области (локальная функция). Характер решения этого уравнения существенно зависит от знака коэффициента c.

Остановимся сперва на случае $c = -\varkappa^2 < 0$. Решение уравнения $\Delta v - \varkappa^2 v = -f$ можно представить в форме объемных потенциалов

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}).$$

Таким образом, решение уравнения (1) без дополнительных условий в бесконечности определено неоднозначно. Будем искать, по аналогии с внешней задачей для уравнения Лапласа, решение уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности. Этому условию удовлетворяет функция $v_1(M)$ и не удовлетворяет функция $v_2(M)$.

Докажем следующую теорему единственности:

уравнение

$$\Delta v - \varkappa^2 v = -f$$

не может иметь более одного решения, обращающегося в нуль на бесконечности[1]).

Допустим, что существуют два различных решения поставленной задачи $\bar{v}(M)$ и $\bar{\bar{v}}(M)$ и рассмотрим их разность $w = \bar{v} - \bar{\bar{v}}$. По предположению, найдется такая точка M_0, что $w(M_0) = A \neq 0$. Для определенности будем считать $A > 0$. В силу того, что $w(M) \to 0$ в бесконечности, можно указать такое R_0, что при $r > R_0$ функция $w < A/2$. Отсюда следует, что точка M_0 лежит внутри T_{R_0} — сферы радиуса R_0 — и что функция $w(M)$ достигает своего максимального значения внутри T_{R_0}. Таким образом, мы приходим к противоречию с принципом максимального значения, имеющим место для нашего уравнения (см. § 1, п. 4). Теорема единственности доказана.

Рассмотрим теперь случай $c = k^2 > 0$.

Функции

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{и} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP})$$

по-прежнему являются решениями уравнения (1). Однако в этом случае обе функции убывают на бесконечности. Отсюда вытекает необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решение уравнения (1). Эти условия будут разобраны в пп. 2, 3 и 4 настоящего параграфа.

2. Принцип предельного поглощения. Задача о вынужденных колебаниях с затуханием приводит к уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} + \beta u_t - F(M, t) \qquad (\beta > 0). \tag{2}$$

Будем считать, что функция $F(M,t)$ является периодической по времени, т. е. $F(M,t) = f(M)e^{i\omega t}$. В этом случае уравнение (2) имеет периодические решения вида

$$u(M, t) = v(M)e^{i\omega t}. \tag{3}$$

[1]) Под термином «функция, обращающаяся в нуль на бесконечности» мы понимаем следующее: каково бы ни было ε, найдется такое $r(\varepsilon)$, что для любой точки $M(r, \vartheta, \varphi)$, для которой $r > r(\varepsilon)$, $|u(M)| < \varepsilon$, т. е. мы предполагаем равномерное стремление к нулю при $r \to \infty$.

Функция $v(M)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta v + q^2 v = -f(M), \tag{4}$$

где $q^2 = k^2 - i\beta\omega$ является комплексной величиной, $k = \omega/a$.

Будем называть уравнение (4) с комплексным значением коэффициента q^2 уравнением с комплексным поглощением 1-го ($\operatorname{Im} q^2 < 0$) или 2-го типа ($\operatorname{Im} q^2 > 0$), в зависимости от знака мнимой части q^2, что соответствует временной зависимости $e^{i\omega t}$ (1-го типа) $e^{-i\omega t}$ (2-го типа).

Фундаментальные решения этого уравнения, зависящие только от r, имеют вид

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iqr}}{r} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iqr}}{r},$$

где

$$q = \pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - i\beta\omega} =$$

$$= \pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\beta^2\omega^2}+k^2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\beta^2\omega^2}-k^2}{2}}\right\} = q_0 - iq_1. \tag{5}$$

Знаки корней выберем так, чтобы $q_1 > 0$. Следовательно,

$$\bar{v}_0(r) = \frac{e^{-iq_0 r}}{r}\, e^{-q_1 r}, \quad \bar{\bar{v}}_0(r) = \frac{e^{iq_0 r}}{r}\, e^{q_1 r}.$$

Условию ограниченности на бесконечности удовлетворяет только функция $\bar{v}_0(r)$; функция $\bar{\bar{v}}_0(r)$ неограниченно возрастает при $r \to \infty$ и потому не имеет прямого физического смысла.

Объемный потенциал

$$\bar{v}(M) = \int_T f(P)\, \frac{e^{-iq_0 R}}{4\pi R}\, e^{-q_1 R}\, d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \tag{6}$$

представляет единственное решение уравнения (4), обращающееся в нуль на бесконечности. Предел $\bar{v}(M)$ при $\beta \to 0$ равен

$$v(M) = \lim_{\beta\to 0} \bar{v}(M) = \int_T f(P)\, \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\, d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

так как при $\beta \to 0$ имеем: $q_0 \to k$ и $q_1 \to 0$. При выбранной нами временной зависимости $e^{i\omega t}$ величина $q_0 > 0$, так как знак q_0 связан со знаком q_1 соотношением $2q_0 q_1 = \beta\omega$.

Если зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$ ($\operatorname{Im} q^2 > 0$), то положительному значению q_1 будет соответствовать $q_0 < 0$ и предел q_0 при $\beta \to 0$ равен $-k$.

Таким образом, дополнительным условием, позволяющим выделить решение волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = -f,$$

соответствующее расходящимся волнам, является требование, чтобы функция $v(M)$ являлась пределом ограниченного решения волнового уравнения с комплексным поглощением первого рода при стремлении к нулю коэффициента поглощения[1]).

3. Принцип предельной амплитуды. С волновым уравнением

$$\Delta v + k^2 v = -f \tag{7}$$

чаще всего приходится встречаться при изучении установившихся колебаний, возбуждаемых периодическими силами (см. § 1, п. 1).

Рассмотрим уравнение колебаний с периодической правой частью

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F \quad (F = fe^{i\omega t}). \tag{8}$$

Для определенности решения к уравнению следует добавить некоторые начальные условия, например, нулевые:

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Функция $u(M, t)$ в начальной стадии процесса не будет строго периодической. Однако с течением времени в системе будут устанавливаться периодические колебания с частотой вынуждающей силы, т. е. решение $u(M, t)$ примет вид

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}, \tag{10}$$

$v(M)$ представляет предельную амплитуду колебаний, т. е. $v(M) = \lim\limits_{t\to\infty} ue^{-i\omega t}$, и удовлетворяют уравнению

$$\Delta v + k^2 v = -f \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right),$$

Требование, чтобы $v(M)$ было предельной амплитудой колебаний с нулевыми начальными данными, и представляет то дополнительное условие, которое надо присоединить к волновому уравнению для выделения единственного решения.

Таким образом, приходим к следующей задаче:

найти решение волнового уравнения $\Delta v + k^2 v = -f$, *являющееся предельной амплитудой для решения уравнения колебаний*

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f(M) e^{i\omega t} \tag{8*}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1]) См. А. Г. Свешников, Принцип излучения, ДАН 73, 5 (1950).

Представим предельную амплитуду в явной форме. Для этого найдем решение уравнения колебаний (8*) с нулевыми начальными данными, пользуясь формулой

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T_{at}^M}\frac{f(P)\,e^{i\omega\left(t-\frac{R}{a}\right)}}{R}\,d\tau_P \qquad (R=R_{MP}),$$

полученной в главе V (§ 2, (5)). Здесь T_{at}^M — шар радиуса at с центром в точке M.

Пусть $f(P)$ — локальная функция, отличная от нуля только внутри некоторой ограниченной области T_0. Тогда для предельной амплитуды $\bar{v}(M)$ получим выражение

$$v(M)=\lim_{t\to\infty}u(M,\ t)\,e^{-i\omega t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T_{at}}\frac{e^{-ikR}}{R}f(P)\,d\tau_P=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{T_0}f(P)\frac{e^{-ikR}}{R}\,d\tau_P \qquad (R=R_{MP}). \qquad (11)$$

Таким образом, предельная амплитуда представляется объемным потенциалом, определяемым главным решением e^{-ikR}/R, которое соответствует расходящимся волнам $e^{i(\omega t-kR)}/R$.

Принцип предельной амплитуды приводит математически к тому же результату, что и принцип предельного поглощения. Это и естественно, так как оба эти принципа выделяют решение, соответствующее расходящимся волнам.

4. Условия излучения. В предшествующих пунктах были рассмотрены общие физические основания, позволяющие найти решение волнового уравнения, соответствующее расходящимся волнам. Однако такой путь требовал обращения к решениям вспомогательных задач. Установим теперь аналитическое условие, характеризующее расходящуюся волну и выраженное непосредственно в терминах изучаемого решения волнового уравнения.

Плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x, имеют вид

$\bar{u}=f\left(t-\frac{x}{a}\right)$ — прямая волна (идущая в положительном направлении оси x);

$\bar{\bar{u}}=f\left(t+\frac{x}{a}\right)$ — обратная волна (идущая в отрицательном направлении оси x).

Прямая волна характеризуется соотношением

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=0,$$

обратная волна — соотношением [1])

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial t} = 0.$$

Для установившегося режима

$$u = v(x)\, e^{i\omega t}$$

эти соотношения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + ik\bar{v} = 0 \quad \text{для прямой волны,} \\ &\frac{\partial \bar{\bar{v}}}{\partial x} - ik\bar{\bar{v}} = 0 \quad \text{для обратной волны.} \end{aligned}\right\} \quad \left(k = \frac{\omega}{a}\right) \tag{12}$$

Перейдем теперь к случаю сферических волн. Если сферическая волна возбуждается источниками, расположенными в ограниченной части пространства, то на больших расстояниях от источников сферическая волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как $1/r$. Отсюда естественно считать, что расходящаяся сферическая волна должна удовлетворять соотношению [2])

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right); \tag{13}$$

аналогично для сходящейся сферической волны

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{14}$$

Для амплитуды установившихся колебаний эти условия принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{для расходящихся сферических волн,} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{для сходящихся сферических волн.} \tag{16}$$

Соотношения (15) и (16) мы получили, предполагая, что на больших расстояниях всякая расходящаяся волна подобна плоской волне, амплитуда которой убывает как $1/r$. Убедимся в правильности этого утверждения.

---

[1]) Написанные соотношения представляют уравнения с частными производными 1-го порядка, решения которых имеют вид прямой и обратной волны.

[2]) В дальнейшем мы пользуемся двумя обозначениями: $O(\xi)$ — величина, убывающая как ξ при $\xi \to 0$, $o(\xi)$ — величина более высокого порядка малости, чем ξ при $\xi \to 0$.

1. В случае точечного источника, находящегося в начале координат, это утверждение совершенно очевидно, поскольку сама волна имеет вид

$$u(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} = v_0(r)\, e^{i\omega t},$$

так что

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

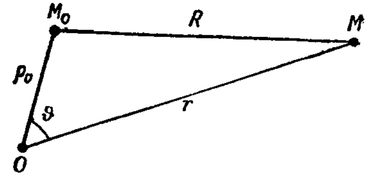

Рис. 82.

2. Пусть сферическая волна возбуждается точечным источником, находящимся в некоторой точке M_0. Амплитуда сферической волны равна

$$v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

где R — расстояние между точками M и M_0, равное (рис. 82)

$$R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0 \cos\vartheta}.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho_0 \cos\vartheta}{R} \approx 1 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

В силу пункта 1

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{R}\right).$$

Проверим справедливость формулы (15):

$$\mathscr{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (15')$$

В самом деле,

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial v_0}{\partial R} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

так как

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} \cdot O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Отсюда и из пункта 1 следует:

$$\mathscr{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

что и требовалось доказать.

3. Покажем, что объемный потенциал

$$v(M) = \int_T f(P)\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\, d\tau_P \quad (R = R_{MP}) \qquad (16')$$

удовлетворяет условию (15). Очевидно, что

$$\mathscr{L}(v)=\int_T f(P)\,\mathscr{L}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right)d\tau_P=\int_T f(P)\,o\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_P=o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Формула (11) представляет амплитуду расходящейся волны, возбуждаемой источниками, произвольно распределенными внутри ограниченной части пространства T. Мы видели, что функция $v(M)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v+k^2v=-f(M)$$

и стремится к нулю как $1/r$ на бесконечности; кроме того, как было показано, для нее на бесконечности выполняется соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial r}+ikv=o\left(\frac{1}{r}\right),$$

являющееся необходимым дополнительным условием.

Покажем, что

существует единственное решение волнового уравнения

$$\Delta v+k^2v=-f(M),$$

где $f(M)$ — локальная функция, удовлетворяющее на бесконечности условиям

$$\left.\begin{aligned} &v=O\left(\frac{1}{r}\right)^{[1]}\\ \text{и}\quad &\frac{\partial v}{\partial r}+ikv=o\left(\frac{1}{r}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

Допуская существование двух различных решений v_1 и v_2, получаем, что их разность

$$w=v_1-v_2$$

удовлетворяет однородному уравнению и условию (α). Пусть Σ_R — сфера радиуса R, который мы в дальнейшем устремим в бесконечность. Пользуясь основной формулой Грина для функций $w(M)$ и $v_0(M)=\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$, будем иметь в точке M_0, лежащей внутри Σ,

$$w(M_0)=\int_{\Sigma_R}\left(v_0\frac{\partial w}{\partial r}-w\frac{\partial v_0}{\partial r}\right)d\sigma.$$

[1]) И. Н. Векуа показано, что первое из приведенных здесь двух условий является следствием второго; см. И. Н. Векуа, Труды Тб. Матем. ин-та 12 (1943).

Условие (α) для $v_0(r)$ и $w(M)$ дает:

$$v_0\frac{\partial w}{\partial r}-w\frac{\partial v_0}{\partial r}=v_0\left[-ikw+o\left(\frac{1}{r}\right)\right]-w\left[-ikv_0+o\left(\frac{1}{r}\right)\right]=$$
$$=v_0\,o\left(\frac{1}{r}\right)-w\,o\left(\frac{1}{r}\right)=o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Поэтому

$$w(M_0)=\int\limits_{\Sigma_R}o\left(\frac{1}{r^2}\right)d\sigma\to 0\quad\text{при}\quad R\to\infty,$$

откуда и следует, в силу произвольности точки M_0, единственность решения нашей задачи.

Условия

$$\left.\begin{aligned}v&=O\left(\frac{1}{r}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial r}+ikv&=o\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

часто называют условиями излучения или условиями Зоммерфельда.

Следует отметить, что для неограниченных областей, не совпадающих со всем пространством, условия на бесконечности могут иметь форму, отличную от условий Зоммерфельда.

Таким образом, соотношения (α) представляют аналитическую форму условий излучения для неограниченного пространства и не основаны на физическом принципе, который позволил бы сформулировать эти условия для областей более сложной формы.

Условия излучения, получающиеся при введении в волновое уравнение бесконечно малого комплексного поглощения, впервые были использованы В. С. Игнатовским[1]). Принцип введения бесконечно малого комплексного поглощения легко применим для неограниченных областей различной формы и для более сложных задач.

Для задач на плоскости, связанных с уравнением

$$\Delta_2 v+k^2v=0,\qquad(17)$$

условия излучения на бесконечности принимают вид

$$\left.\begin{aligned}v&=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\\ \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}&\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

[1]) В. С. Игнатовский, Ann. d. Phys. 18 (1905).

Простейшими решениями этого уравнения являются функции Ханкеля нулевого порядка $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ (см. Дополнение II, ч. I, § 3).

Из асимптотических формул

$$H_\nu^{(1)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

и рекуррентных соотношений

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx}=-H_1^{(1)}(x),\quad \frac{dH_0^{(2)}}{dx}=-H_1^{(2)}(x)$$

видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $H_0^{(2)}(kr)$.

Таким образом, функция $H_0^{(2)}(kr)$ удовлетворяет уравнению (17), условиям излучения (18) и имеет логарифмическую особенность при $r=0$. Поэтому функция $H_0^{(2)}(kr)$, как уже отмечалось в § 2, играет роль функции точечного источника для волнового уравнения (7) в случае двух независимых переменных. Решение неоднородного уравнения

$$\Delta_2 v+k^2v=-f$$

выражается формулой

$$v(M)=-\frac{i}{4}\iint\limits_S H_0^{(2)}(kR_{MP})\,f(P)\,d\sigma_P,$$

где S — область, в которой функция f отлична от нуля.

§ 4. Задачи математической теории дифракции

1. Постановка задачи. Распространение волновых процессов (электромагнитных, упругих, акустических и т. д.) сопровождается целым рядом типичных явлений (дифракция, преломление, отражение и т. д.). Решение задач, связанных с этими явлениями, проводится непосредственно или имеет много общего с решением волнового уравнения в неоднородной среде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\rho\omega^2 v=-\bar{f}\quad (p>0),\quad (1)$$

где p и ρ — параметры среды.

Наибольший интерес с точки зрения физических приложений представляет случай кусочно-постоянных параметров p и ρ. Соответствующая математическая задача состоит в следующем.