Простейшими решениями этого уравнения являются функции Ханкеля нулевого порядка $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_0^{(2)}(kr)$ (см. Дополнение II, ч. I, § 3).

Из асимптотических формул

$$H_\nu^{(1)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

и рекуррентных соотношений

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx}=-H_1^{(1)}(x),\qquad \frac{dH_0^{(2)}}{dx}=-H_1^{(2)}(x)$$

видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $H_0^{(2)}(kr)$.

Таким образом, функция $H_0^{(2)}(kr)$ удовлетворяет уравнению (17), условиям излучения (18) и имеет логарифмическую особенность при $r=0$. Поэтому функция $H_0^{(2)}(kr)$, как уже отмечалось в § 2, играет роль функции точечного источника для волнового уравнения (7) в случае двух независимых переменных. Решение неоднородного уравнения

$$\Delta_2 v+k^2 v=-f$$

выражается формулой

$$v(M)=-\frac{i}{4}\iint\limits_S H_0^{(2)}(kR_{MP})\,f(P)\,d\sigma_P,$$

где S — область, в которой функция f отлична от нуля.

§ 4. Задачи математической теории дифракции

1. Постановка задачи. Распространение волновых процессов (электромагнитных, упругих, акустических и т. д.) сопровождается целым рядом типичных явлений (дифракция, преломление, отражение и т. д.). Решение задач, связанных с этими явлениями, проводится непосредственно или имеет много общего с решением волнового уравнения в неоднородной среде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\rho\omega^2 v=-\bar{f}\quad (p>0),\quad (1)$$

где p и ρ — параметры среды.

Наибольший интерес с точки зрения физических приложений представляет случай кусочно-постоянных параметров p и ρ. Соответствующая математическая задача состоит в следующем.

В неограниченном пространстве имеется ряд ограниченных областей T_i с постоянными параметрами p_i и ρ_i; часть пространства T_0, внешняя по отношению к областям T_i, также однородна ($p_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$). Волновое уравнение внутри каждой области T_i принимает обычный вид

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = -f_i \text{ в } T_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где u_i — значение искомой функции u внутри T_i,

$$k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{p_i}, \quad f_i = \frac{\bar{f}}{p_i}$$

в области T_i. На поверхностях Σ_i, ограничивающих области T_i [1]) дифференциальные уравнения заменяются условиями сопряжения

$$\left.\begin{aligned} &v_i = v_0 \quad \text{на } \Sigma_i, \\ &p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} = p_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} \quad \text{на } \Sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

На бесконечности функция v_0, являющаяся решением волнового уравнения $\Delta v + k_0^2 v = -f_0$ в T_0, должна удовлетворять условиям излучения

$$\left.\begin{aligned} &v_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right), \\ &\frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ниже будет показана достаточность условий сопряжения и условий излучения для однозначного определения функции v во всем пространстве. Поставленная выше задача является простейшей задачей математической теории дифракции.

2. Единственность решения задачи дифракции. Докажем, что задача математической теории дифракции, сформулированная в п. 1, имеет единственное решение. Для упрощения записи будем предполагать, что однородность среды нарушается только одним телом T_1, ограниченным замкнутой поверхностью Σ_1, вне которой расположена область T_0. При этом мы не делаем предположения об односвязности области T_1.

Докажем следующую теорему:

может существовать только одна функция, удовлетворяющая:

а) *уравнениям*

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}_0(v_0) = \Delta v_0 + k_0^2 v_0 = -f_0 \quad \text{в } T_0, \\ &\mathscr{L}_1(v_1) = \Delta v_1 + k_1^2 v_1 = -f_1 \quad \text{в } T_1; \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

[1]) При этом мы рассматриваем для простоты тот случай, когда неоднородности T_i имеют общую границу только с окружающей средой.

б) *условиям сопряжения на поверхности* Σ_1

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_0 \\ p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial \nu}; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

в) *условиям излучения на бесконечности*

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Допуская существованне двух различных решений

$$\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_0\} \quad \text{и} \quad \bar{\bar{v}} = \{\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_0\},$$

получаем, что их разность

$$w = \{w_1, w_0\},$$

где

$$w_1 = \bar{v}_1 - \bar{\bar{v}}_1, \quad w_0 = \bar{v}_0 - \bar{\bar{v}}_0$$

удовлетворяет однородным уравнениям и прежним дополнительным условиям

$$\mathscr{L}_0(w_0) = 0 \text{ в } T_0, \quad \mathscr{L}_1(w_1) = 0 \text{ в } T_1, \tag{2*}$$

$$w_1 = w_0, \quad p_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \quad \text{на } \Sigma_1, \tag{3*}$$

$$w_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{4*}$$

Для функций $\overset{*}{w}_0$, $\overset{*}{w}_1$, комплексно-сопряженных к функциям w_0 и w_1, очевидно, будут удовлетворяться однородные уравнения (2*), условня (3*) и условия излучения

$$\overset{*}{w}_0 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \overset{*}{w}_0}{\partial r} - ik\overset{*}{w}_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4**}$$

Пусть Σ_R — сфера достаточно большого радиуса R, охватывающая область T_1, и T_R — область, ограниченная поверхностями Σ_1 н Σ_R.

Примеияя формулу Грина к функциям w_1, $\overset{*}{w}_1$ в областн T_1 и к w_0, $\overset{*}{w}_0$ в области T_R, получаем:

$$\int_{T_1} \left(w_1 \mathscr{L}_1(\overset{*}{w}_1) - \overset{*}{w}_1 \mathscr{L}_1(w_1)\right) d\tau = \int_{\Sigma_1} \left(w_1 \frac{\partial \overset{*}{w}_1}{\partial \nu_1} - \overset{*}{w}_1 \frac{\partial w_1}{\partial \nu_1}\right) d\sigma = 0,$$

$$\int_{T_R} \left[w_0 \mathscr{L}_0(\overset{*}{w}_0) - \overset{*}{w}_0 \mathscr{L}_0(w_0)\right] d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial \overset{*}{w}_0}{\partial \nu_0} - \overset{*}{w}_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial \overset{*}{w}_0}{\partial \nu_0} - \overset{*}{w}_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right) d\sigma = 0,$$

где ν_0 — нормаль внешняя к области T_R, ν_1 — нормаль, внешняя к области T_1. Очевидно, $\frac{\partial}{\partial \nu_0} = -\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ на Σ_1.

Умножая первое равенство на p_1, второе на p_0, складывая их и пользуясь условиями сопряжения (3*), находим:

$$\int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) d\sigma = 0.$$

Выражая из условий излучения производные

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial r} = ikw_0^* + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} = -ikw_0 + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

приходим к следующему равенству:

$$2ik \int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left[w_0 o\left(\frac{1}{R}\right) - w_0^* o\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\sigma = 0.$$

Второй интеграл при $R \to \infty$ стремится к нулю, поэтому

$$\int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma = \int_{\Sigma_R} |Rw_0|^2 \, d\Omega \to 0, \quad R \to \infty \qquad (d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi). \tag{5}$$

В Дополнении II, ч. II, § 4 показано, что функция

$$V_m(r, \theta, \varphi) = \zeta_m^{(2)} Y_m(\theta, \varphi),$$

где

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (\rho = k_0 r),$$

и $Y_m(\theta, \varphi)$ — сферическая функция m-го порядка, удовлетворяет волновому уравнению

$$\mathscr{L}_0(V_m) = \Delta V_m + k_0^2 V_m = 0$$

и условию излучения

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} + ik_0 V_m = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Применим формулу Грина в области T_R к функциям w_0 и V_m

$$0 = \int_{T_R} [w_0 \mathscr{L}(V_m) - V_m \mathscr{L}(w_0)] \, d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma = I_1 + I_R.$$

Второе слагаемое I_R в силу условий излучения стремится к нулю при $R \to \infty$ (см. теорему § 3, п. 4). Так как первый интеграл I_1 не зависит от R, то отсюда следует, что $I_1 = 0$ и, следовательно, $I_R = 0$ прн любом R, т. е.

$$\left.\frac{d\zeta_m^{(2)}(k_0 r)}{dr}\right|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi)\, d\Omega - \zeta_m^{(2)}\Big|_{r=R} \cdot \int_{\Sigma_R} \frac{\partial w_0}{\partial r} Y_m(\theta, \varphi)\, d\Omega = 0.$$

Еслн обозначить

$$\int_{\Sigma_R} w_0 Y_m(\theta, \varphi)\, d\Omega = \alpha_m(k_0 R),$$

то можно напнсать:

$$\zeta_m^{(2)\prime}(k_0 R)\, \alpha_m(k_0 R) - \alpha_m'(k_0 R)\, \zeta_m^{(2)}(k_0 R) = 0,$$

откуда находим

$$\alpha_m(k_0 R) = a_m \zeta_m^{(2)}(k_0 R),$$

где a_m — постоянный множитель.

Условие полноты сферических функций

$$\int_{\Sigma_R} |R w_0|^2\, d\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} R^2 \alpha_m^2(k_0 R) \tag{6}$$

и формула (5) дают:

$$R\alpha_m(k_0 R) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Однако согласно асимптотической формуле

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) \approx \frac{1}{\rho} e^{-i\left(\rho - \frac{m+1}{2}\pi\right)},$$

произведение $r\zeta_m^{(2)}(k_0 r)$ остается по модулю больше некоторого положнтельного числа при больших значениях r; следовательно, $a_m = 0$, т. е. $\alpha_m(k_0 R) \equiv 0$; отсюда в силу уравнення замкнутости (6) вытекает, что $w_0 = 0$ на сфере Σ_{r_0}. Таким образом, если сфера Σ_{r_0} некоторого раднуса r_0 охватывает область T_1, то вне этой сферы функцня $w \equiv 0$. Отсюда в снлу аналитичности[1]) решення уравнення $\mathscr{L} = 0$ заключаем, что функция $w_0 \equiv 0$ всюду в области T_0. Далее, из условий сопряжения следует, что на поверхности Σ_1

$$w_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = 0. \tag{7}$$

Основная формула Грина, примененная в области T_1 к функции w_1, показывает, что

$$w_1(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \left[\frac{e^{-ik_1 R}}{R} \frac{\partial w_1(P)}{\partial \nu_1} - w_1(P) \frac{\partial}{\partial \nu_1}\left(\frac{e^{-ik_1 R}}{R}\right)\right] d\sigma = 0, \tag{8}$$

где $R = R_{MP}$, в любой точке M области T_1.

Итак мы убедились, что $w(M) \equiv 0$ во всем пространстве; это и доказывает теорему единственностн.

---

[1]) Аналнтичность функцни w в области T_1 следует из формулы (7) § 2 для комплексного значения $\varkappa = ik$ и для поверхности Σ, целиком лежащей внутри T_1.

3. Дифракция на сфере. 1. Практически важным классом решений уравнения колебаний

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

являются плоские волны. Плоской волной, распространяющейся в каком-нибудь заданном направлении, называется решение, зависящее от времени и от одной пространственной координаты, отсчитываемой в направлении распространения. Например, плоская волна, распространяющаяся вдоль оси x, удовлетворяет уравнению с двумя независимыми переменными

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

и имеет вид

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

В случае установившегося режима, когда зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$, плоская волна имеет вид

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{9}$$

где $k = \omega/a$ — волновое число, $|A|$ — амплитуда.

Плоская волна, распространяющаяся в направлении l, где $l(l_x, l_y, l_z)$ — единичный вектор, может быть записана следующим образом:

$$u(x, y, z, t) = Ae^{i[\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z)]} = Ae^{i[\omega t - klr]}. \tag{10}$$

Функции

$$v(x) = Ae^{-ikx}, \quad v(x, y, z) = Ae^{-iklr}, \tag{11}$$

являющиеся решениями волнового уравнения

$$\Delta v + k^2 v = 0, \tag{12}$$

обычно также называются плоскими волнами.

В математической теории дифракции обычно изучаются возмущения поля в однородной среде, создаваемые наличием включений T_i, нарушающих однородность среды. Пусть $\bar{v}(M)$ — поле в однородной среде, создаваемое заданными источниками, которые мы считаем расположенными вне области T_i $(i = 1, \ldots, n)$; в частности, это могут быть достаточно удаленные источники, вызывающие появление плоских волн,

$$\bar{v}(x, y, z) = Ae^{-iklr}. \tag{13}$$

Действительное поле v_0, имеющее место в области T_0 при наличии неоднородностей, можно представить в виде суммы

$$v_0(M) = w_0(M) + \bar{v}_0(M),$$

где $\bar{v}_0(M)$ — «падающая волна», $w_0(M)$ — дифрагированная или отраженная волна, представляющая возмущение внешнего поля $\bar{v}$ неоднородностями T_i.

Будем искать в области T_0 дифрагированное поле $w_0(M)$, а внутри T_i — «преломленное поле» v_i. Установим условия, определяющие искомые функции w_0 и v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

а) функции w_0 и v_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \quad \text{в} \quad T_0, \tag{14}$$

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = 0 \quad \text{в} \quad T_i \ (i = 1, 2, \ldots, n);$$

б) на границах раздела Σ_i областей T_i и T_0 выполняются следующие условия сопряжения:

$$v_i = w_0 + \bar{v}_0 \quad \text{на} \quad \Sigma_i, \tag{15}$$

где $\bar{v}_0$ — заданная функция,

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + f_i \quad \text{на} \quad \Sigma_i, \tag{16}$$

где $f_i = p_0 \dfrac{\partial \bar{v}_0}{\partial \nu}$ — заданная функция;

в) отраженная волна $w_0(M)$ на бесконечности ведет себя, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения

$$w_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Рассмотрим более подробно дифракцию плоской волны на сфере[1]). Пусть в направлении оси z из бесконечности падает плоская волна

$$\bar{v}_0 = Ae^{-ikz} \tag{17}$$

на шар радиуса R с центром в начале координат. Ищем отраженное и преломленное поля в виде разложения по сферическим функциям; $\bar{v}_0$ и $f = p_0 \dfrac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}$, входящие в правые части условий сопряжения, разложим по сферическим функциям.

Положим $z = r\cos\theta$; тогда можно воспользоваться следующим разложением плоской волны по сферическим функциям:

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{18}$$

где

$$\psi_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+1/2}(kr),$$

а $J_{m+1/2}(kr)$ — функция Бесселя первого рода $(m+1/2)$-го порядка, $P_m(\cos\theta)$ — полином Лежандра m-го порядка. В самом деле, слева стоит решение волнового уравнения, зависящее только от z. Всякое решение волнового уравнения может быть представлено как сумма произведений сферических функций на $\psi_m(kr)$. Поскольку в нашем случае левая часть (18) обладает зональной симметрией, то

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{19}$$

---

[1]) Аналогичные методы часто используются в квантовой механике в задачах о рассеянии частиц.

где C_m — неопределенные пока коэффициенты. Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра и их нормой (см. Дополнение II, ч. II), получаем:

$$C_m \psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \tag{20}$$

$$(\rho = kr, \quad \xi = \cos\theta).$$

Найдем первый член асимптотического представления для интеграла, стоящего в правой части; сравнение его с первым членом асимптотического разложения функции $\psi_m(\rho)$ позволит нам определить коэффициент C_m. Проинтегрируем m раз по частям, интегрируя каждый раз $e^{-i\rho\xi}$ и дифференцируя $P_m(\xi)$. В результате получим разложение интеграла по степеням $1/\rho$. Сохраняя только первый член разложения, будем иметь:

$$\int_{-1}^{+1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi \cong \frac{1}{-i\rho} \left[e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\right]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} P_m(1) - e^{i\rho} P_m(-1)\right) = \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - (-1)^m e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho} - e^{-im\pi} e^{i\rho}\right) =$$

$$= \frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{-i\rho}\left[e^{-i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(\rho - m\frac{\pi}{2}\right)}\right] = 2(-i)^m \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

С другой стороны, как известно (см. Дополнение II, ч. I, § 1),

$$\psi_m(\rho) \cong \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Сравнивая эти выражения, находим из (20):

$$C_m = (2m+1)(-i)^m, \tag{21}$$

что и доказывает формулу (18).

Из (17) следует:

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_0\big|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos\theta); \\ a_m &= A(2m+1)(-i)^m \psi_m(k_0R); \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\bigg|_{r=R} &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m(\cos\theta); \\ b_m &= Ak_0p_0(2m+1)(-i)^m \psi_m'(k_0R). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отраженное и преломленное поля являются решениями волнового уравнения и, так же как и падающее поле, обладают зональной симметрией.

Поэтому функции v_1 и w_0 мы ищем в виде

$$v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m (k_1 r) P_m (\cos\theta), \tag{24}$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta_m (k_0 r) P_m (\cos\theta), \tag{25}$$

$$\zeta_m (\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}} (\rho). \tag{26}$$

Перейдем теперь к определению коэффициентов разложения α_m и β_m. Пользуясь условием сопряжения и сравнивая коэффициенты при $P_m(\cos\theta)$, получаем:

$$\alpha_m \psi_m (k_1 R) - \beta_m \zeta_m (k_0 R) = a_m = A (2m+1) (-i)^m \psi_m (k_0 R),$$

$$p_1 k_1 \alpha_m \psi_m' (k_1 R) - p_0 k_0 \beta_m \zeta_m' (k_0 R) = b_m = A k_0 p_0 (2m+1) (-i)^m \psi_m' (k_0 R),$$

откуда

$$\alpha_m = A (2m+1) (-i)^m \frac{p_0 k_0 \left[\psi_m (k_0 R) \zeta_m' (k_0 R) - \zeta_m (k_0 R) \psi_m' (k_0 R)\right]}{p_0 k_0 \psi_m (k_1 R) \zeta_m' (k_0 R) - p_1 k_1 \psi_m' (k_1 R) \zeta_m (k_0 R)}, \tag{27}$$

$$\beta_m = A (2m+1) (-i)^m \frac{p_1 k_1 \psi_m (k_0 R) \psi_m' (k_1 R) - p_0 k_0 \psi_m' (k_0 R) \psi_m (k_1 R)}{p_0 k_0 \psi_m (k_1 R) \zeta_m' (k_0 R) - p_1 k_1 \psi_m' (k_1 R) \zeta_m (k_0 R)}. \tag{28}$$

3. Рассмотрим в качестве примера задачу о рассеянии звука твердым сферическим препятствием. Пусть на абсолютно твердую и неподвижную сферу радиуса R с центром в начале координат падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении оси z. Звуковое давление $p(x, y, z, t)$, как было установлено в главе II, § 1, удовлетворяет уравнению колебаний

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \Delta p, \quad a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

где a — скорость звука, γ — показатель адиабаты, p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии.

Давление в падающей плоской волне дается функцией

$$\bar{p}_0 = A e^{-i(\omega t - kz)} \left(k = \frac{\omega}{a}\right),$$

где A — постоянная.

Рассматривая установившийся процесс

$$p(x, y, z, t) = p(x, y, z) e^{-i\omega t},$$

получаем для $p(x, y, z)$ волновое уравнение

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

На поверхности сферы S_R в силу ее абсолютной твердости должна равняться нулю нормальная составляющая скорости u. Проекция скорости на направление нормали n связана с давлением следующим уравнением:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n},$$

которое в стационарном случае дает

$$u_n = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}.$$

Отсюда получаем граничное условие

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S_R} = 0.$$

Полагая $p = \bar{p}_0 + w$, где $w(x, y, z)$ — давление рассеянной волны, получаем для определения w следующие условия:

а) функция $w(x, y, z)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta w + k^2 w = 0;$$

б) на поверхности сферы S_R выполняется граничное условие

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{S_R} = -\left.\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n}\right|_{S_R};$$

в) рассеянная волна w ведет себя на бесконечности, как расходящаяся сферическая волна, т. е. удовлетворяет условию излучения при $r \to \infty$,

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Нетрудно видеть, что эта задача является частным случаем рассмотренной выше задачи дифракции и соответствует значению параметра $p_1 = 0$. Полагая в формулах (25) и (28) $p_1 = 0$, получаем:

$$\beta_m = -A(2m+1)(-i)^m \frac{\psi_m'(k_0R)}{\zeta_m'(k_0R)} \tag{29}$$

и

$$w = -A\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)(-i)^m \frac{\psi_m'(k_0R)}{\zeta_m'(k_0R)}\zeta_m(k_0r)P_m(\cos\theta). \tag{30}$$

Если длина волны велика по сравнению с размерами шара, т. е. $k_0R \ll 1$, то в формуле (29) можно воспользоваться разложениями функций $\psi_m(kR)$ и $\zeta_m(kR)$ в ряды, которые следуют из разложений функций $J_{m+1/2}(kR)$ и $H^{(2)}_{m+1/2}(kR)$ по степеням малого аргумента kR (см. Дополнение II, ч. I, §§ 1 и 3):

$$\psi_0(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{5/2}}{\Gamma(5/2)}\right), \quad \psi_1(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{3/2}}{\Gamma(5/2)},$$

$$\zeta_0(kR) \cong i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}; \quad \zeta_1(kR) \cong -i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)}.$$

Так как

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(5/2) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi},$$

то получаем:

$$\psi_0(kR) \cong 1 - \frac{(kR)^2}{6}, \quad \psi_1(kR) \cong \frac{kR}{3},$$

$$\zeta_0(kR) \cong \frac{i}{kR}, \quad \zeta_1(kR) \cong \frac{i}{(kR)^2},$$

откуда следует

$$\psi_0'(kR) \cong -\frac{kR}{3}, \quad \psi_1'(kR) \cong \frac{1}{3},$$

$$\zeta_0'(kR) \cong -\frac{i}{(kR)^2}, \quad \zeta_1'(kR) \cong -\frac{2i}{(kR)^3}.$$

Подставляя в формулу (29) найденные выражения для ψ_m' и ζ_m', находим:

$$\beta_0 = i\frac{A}{3}(kR)^3, \quad \beta_1 = -\frac{A}{2}(kR)^3.$$

Нетрудно видеть, что следующие коэффициенты пропорциональны $(kR)^5$, поэтому при рассеянии длинных волн ($kR \ll 1$) возмущение w приближенно представляется двумя первыми членами ряда (30)

$$\left.\begin{aligned} &w \cong \beta_0\zeta_0(kr) + \beta_1\zeta_1(kr)\cos\theta \\ &[P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

На больших расстояниях от возмущающей сферы ($kr \gg 1$) в так называемой «дальней» или «волновой» зоне для функций $\zeta_0(kr)$ и $\zeta_1(kr)$ имеем асимптотические представления

$$\zeta_0(kr) \cong \frac{i}{kr}e^{-ikr}, \quad \zeta_1(kr) \cong -\frac{1}{kr}e^{-ikr}, \tag{32}$$

которые вытекают из асимптотических представлений функций Ханкеля.

Подставляя в формулу (31) выражения (32) для $\zeta_0(kr)$ и $\zeta_1(kr)$ и заменяя β_0 и β_1 их приближенными значениями, получим:

$$w \cong -\frac{Ak^2R^3}{3r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}. \tag{33}$$

Обратимся теперь к вычислению интенсивности рассеянной волны; эта величина определяется как среднее значение потока энергии (вектора Умова), равного произведению избыточного звукового давления w на скорость u, причем под w и u следует понимать действительные части соответствующих выражений. В нашем случае

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0\cos(\omega t - kr), \\ u &= u_0\cos(\omega t - kr), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где w_0 и u_0 — соответствующие амплитуды.

Вычислим интенсивность звука I в волновой зоне, сохраняя при этом главные члены асимптотических разложений,

$$I = \frac{u_0w_0}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kr)\,dt = \frac{u_0w_0}{2} \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega} - \text{период}\right).$$

Из уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial r}$$

и формулы (34) находим:

$$u_0 = \frac{w_0}{a\rho}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{w_0^2}{2a\rho} = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

Обозначая мощность, рассеянную сферой в конус $d\theta$, через

$$2\pi r^2\Sigma(\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

будем иметь:

$$\Sigma(\theta) = \frac{A^2k^4R^6}{18a\rho}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

Полярная диаграмма интенсивности рассеянного шаром звука приведена

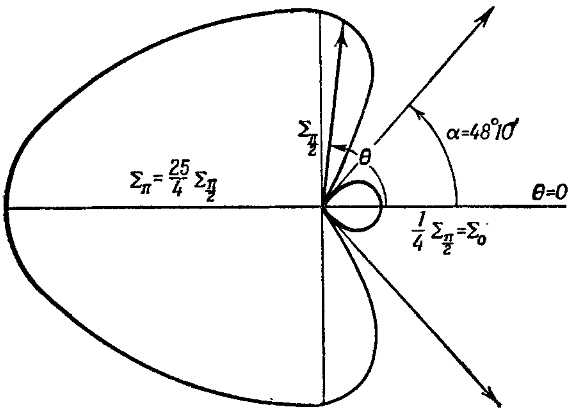

Рис. 83.

на рис. 83 (масштабы не соблюдены). Если

$$\cos\theta = +\frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha = 48^\circ 10',$$

то в направлении $\theta = \alpha$ рассеяние отсутствует.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

1. Найти функцию влияния стационарного точечного источника газа, предполагая, что газ распадается в процессе диффузии. Решить задачу для диффузии в пространстве и на плоскости.

2. Решить ту же задачу в полуплоскости $y > 0$, считая, что при $y = 0$ концентрация равна нулю.

3. а) Решить внутреннюю и внешнюю задачи для уравнения

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0,$$

если на сфере $r = r_0$ задаио граничное условие $u|_{r=r_0} = A\cos\theta$.

В случае внешней задачи сформулировать условия на бесконечности, обеспечивающие единственность решеиия.

Рассмотреть аналогичные задачи, предполагая, что

$$u|_{r=r_0} = F(\theta).$$

б) Решить аналогичные задачи для уравнения с двумя независимыми переменными, когда граничные условия заданы на окружности радиуса r_0 и имеют вид

$$u|_{r=r_0} = A\cos\varphi$$

и, соответственно,

$$u|_{r=r_0} = F(\varphi).$$

4. Решить задачи 3 а), б) для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

В случае внутренней задачи исследовать вопрос о том, при каких значениях r_0 существует единственное решение (k считать заданным).

Сформулировать условия, гарантирующие единственность решения как для двух, так и для трех независимых переменных.

5. На глубине h под поверхностью земли находится среда, в которой с постоянной плотностью распределено радиоактивное вещество. Найти концентрацию эманации, считая, что концентрация ее на поверхности равна нулю.

6. Найти собственные частоты мембраны, имеющей форму кольца, радиусы которого равны a и b ($a < b$), считая что $v|_{r=a} = 0$ и $v|_{r=b} = 0$. Показать, что предел первого собственного значения при $a \to 0$ равен первому собственному значению круглой мембраны радиуса b с закрепленной границей.

7. Найти собственные колебания и собственные частоты для эндовибратора цилиндрической формы, считая стенки эндовибратора идеально проводящими. Рассмотреть ту же задачу в акустической интерпретации.

Указание. В случае электромагнитных колебаний ввести поляризационный потенциал (см. приложение I к гл. VII).

8. Определить электромагнитное поле точечного диполя в неограниченном пространстве, считая, что величины поля пропорциональны $e^{i\omega t}$. Исследовать асимптотическое поведение решения на больших расстояниях (в волновой зоне). Решить ту же задачу для диполя, находящегося над идеально проводящей поверхностью (вертикальный диполь).

Указание. Ввести поляризационный потенциал.

9. Поставить задачу о распространении электромагнитных волн внутри бесконечного цилиндрического радиоволновода произвольного сечения с идеально проводящими стенками. Рассмотреть волну электрического типа, распространяющуюся вдоль круглого цилиндрического волновода и имеющую наибольшую длину. Найти поле, вычислить поток энергии через сечение, перпендикулярное к основанию (см. приложение I к гл. VII).

10. Решить неоднородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f$$

в неограниченной цилиндрической области круглого сечения, на поверхности которой имеют место однородные граничные условия первого рода или второго рода, и построить функцию источника (см. приложение II к гл. VII).

11. Построить функцию источника в случае первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

а) в полупространстве $z > 0$;
б) на полуплоскости $y > 0$;
в) внутри слоя $-l \leqslant z \leqslant l$.

12. Решить задачу о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном идеально проводящем цилиндре. Решить эту же задачу в акустической интерпретации.

13. Найти собственные электромагнитные колебания сферического эндовибратора с идеально проводящими стенками. Рассмотреть случаи колебаний типа *TE* и *TM* (см. приложение II к гл. VII).

14. Найти собственные электромагнитные колебания эндовибратора, представляющего собой область, заключенную между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров.

Указание. Для поляризационного потенциала $\Pi_{n,m}$ воспользоваться формулой, аналогичной формуле (14) приложения II к гл. VII.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

I. Волны в цилиндрических трубах

1. При конструировании различного рода радиоустановок приходится решать важную задачу о передаче электромагнитной энергии от передатчика к передающей антенне или, наоборот, от антенны к приемнику. Вопросы трансляции электромагнитной энергии встречаются также и в ряде других практических задач современной радиотехники.

До последнего времени эта задача удовлетворительно решалась с помощью двухпроводной линии, представляющей собой два металлических провода, между которыми распространяется электромагнитная волна. Но оказывается, что наряду с недостатками, свойственными вообще передающим линиям, такая двухпроводная линия излучает электромагнитную энергию, причем это излучение увеличивается с повышением частоты радиоволн. Поэтому такой вид передающей линии становится мало удобным в области ультракоротких радиоволн.

В последние годы в технике ультракоротких (сантиметровых и дециметровых) радиоволн для передачи энергии применяются совершенно другие передающие устройства — полые металлические трубы (радиоволноводы), внутри которых происходит распространение радиоволн. Такие передающие устройства, обладая малыми потерями, являются очень удобными линиями передач[1].

Математическая теория распространения радиоволн по трубам была заложена еще Рэлеем, изучавшим распространение акустических волн в трубах. Интенсивное развитие теория радиоволноводов получила в последние годы, особенно в работах

[1]) Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг, Радиоволноводы, ч. I, Гостехиздат, 1946.