12. Решить задачу о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном идеально проводящем цилиндре. Решить эту же задачу в акустической интерпретации.

13. Найти собственные электромагнитные колебания сферического эндовибратора с идеально проводящими стенками. Рассмотреть случаи колебаний типа *TE* и *TM* (см. приложение II к гл. VII).

14. Найти собственные электромагнитные колебания эндовибратора, представляющего собой область, заключенную между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров.

Указание. Для поляризационного потенциала $\Pi_{n,m}$ воспользоваться формулой, аналогичной формуле (14) приложения II к гл. VII.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ VII

I. Волны в цилиндрических трубах

1. При конструировании различного рода радиоустановок приходится решать важную задачу о передаче электромагнитной энергии от передатчика к передающей антенне или, наоборот, от антенны к приемнику. Вопросы трансляции электромагнитной энергии встречаются также и в ряде других практических задач современной радиотехники.

До последнего времени эта задача удовлетворительно решалась с помощью двухпроводной линии, представляющей собой два металлических провода, между которыми распространяется электромагнитная волна. Но оказывается, что наряду с недостатками, свойственными вообще передающим линиям, такая двухпроводная линия излучает электромагнитную энергию, причем это излучение увеличивается с повышением частоты радиоволн. Поэтому такой вид передающей линии становится мало удобным в области ультракоротких радиоволн.

В последние годы в технике ультракоротких (сантиметровых и дециметровых) радиоволн для передачи энергии применяются совершенно другие передающие устройства — полые металлические трубы (р а д и о в о л н о в о д ы), внутри которых происходит распространение радиоволн. Такие передающие устройства, обладая малыми потерями, являются очень удобными линиями передач [1]).

Математическая теория распространения радиоволн по трубам была заложена еще Рэлеем, изучавшим распространение акустических волн в трубах. Интенсивное развитие теория радиоволноводов получила в последние годы, особенно в работах

---

[1]) Б. А. В в е д е н с к и й и А. Г. А р е н б е р г, Радиоволноводы, ч. I, Гостехиздат, 1946.

советских ученых. В настоящее время свойства круглого, прямоугольного и других типов волноводов изучены достаточно хорошо.

Рассмотрим сначала свойства радиоволноводов произвольного поперечного сечения, а затем проиллюстрируем их на ряде конкретных примеров. Итак, рассмотрим цилиндрическую трубу, неограниченно простирающуюся вдоль оси z. Будем предполагать стенки трубы идеально проводящими. Обозначим Σ — поверхность, S — поперечное сечение трубы и C — контур, ограничивающий это сечение. Предположим, что: 1) характеристики среды, заполняющей такой волновод, ε и μ равны 1, $\sigma=0$; 2) внутри волновода отсутствуют источники поля; 3) поля периодически меняются по закону $e^{-i\omega t}$.

Уравнения Максвелла в этом случае принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \end{aligned} \quad \left(k=\frac{\omega}{c}\right) \right\} \tag{1}$$

Поскольку стенки волновода являются идеально проводящими, тангенциальная компонента E_t на стенке волновода равна нулю

$$E_t\,|_{\Sigma} = 0. \tag{2}$$

Покажем, что *внутри волновода могут распространяться бегущие электромагнитные волны.* Будем искать решение уравнений (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{H} &= -ik\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\Pi}$ — поляризационный потенциал. Рассмотрим случай, когда вектор $\boldsymbol{\Pi}$ имеет лишь одну компоненту, направленную вдоль оси $z(H_z=0)$. В этом случае уравнения (1) после подстановки в них выражений (3) дадут:

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = 0 \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{\Pi} = \Pi\boldsymbol{i}_z).$$

Условие (2) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$\Pi\,|_{\Sigma} = 0. \tag{5}$$

Ищем решение в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M)\,f(z), \tag{6}$$

где M — точка, лежащая в поперечном сечении S. Подставляя (6) в (4), приходим к выводу, что $\psi(M)$ является собственной функцией задачи о колебаниях мембраны, закрепленной по контуру, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2\psi+\lambda\psi=0 \text{ внутри } S, \\ &\psi|_C=0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Здесь $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа.

Обозначим через $\{\lambda_n\}$ и $\{\psi_n\}$ систему собственных значений и собственных функций этой задачи. Частное решение задачи (4) имеет вид

$$\Pi_n(M, z)=\psi_n(M)f_n(z),$$

где функция $f_n(z)$ определяется из уравнения

$$f_n''+(k^2-\lambda_n)f_n=0. \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (8)

$$f_n(z)=A_ne^{i\gamma_nz}+B_ne^{-i\gamma_nz} \qquad \left(\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}\right). \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что член $A_ne^{i\gamma_nz}$ соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси z, второй же член в формуле (9) — волне, бегущей в обратном направлении.

Рассматривая лишь волну, бегущую в одном направлении, положим

$$f_n(z)=A_ne^{i\gamma_nz},$$

тогда получим решение в виде

$$\Pi_n(M, z)=A_n\psi_n(M)e^{i\gamma_nz} \qquad (10)$$

где A_n — постоянная, определяемая из условий возбуждения полей.

Подставляя выражение (10) в формулы (3) и восстанавливая множитель $e^{-i\omega t}$, найдем составляющие поля в виде

$$F_n(M)e^{i(\gamma_nz-\omega t)}, \qquad (11)$$

где F_n — функция, выражающаяся через собственную функцию мембраны $\psi_n(M)$ или ее производные.

Если $k^2>\lambda_n$, то γ_n вещественно и выражение (11) представляет собой бегущую волну, распространяющуюся вдоль оси z с фазовой скоростью

$$v=\frac{\omega}{\sqrt{k^2-\lambda_n}}=\frac{c}{\sqrt{1-\lambda_n/k^2}}>c.$$

Групповая скорость волны, очевидно, равна

$$u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \lambda_n/k^2} < c,$$

т. е. в пустом волноводе имеет место дисперсия.

Если $k^2 < \lambda_n$, то $\gamma_n = i\varkappa_n$ $(\varkappa_n > 0)$ и вместо выражения (11) получаем затухающую волну

$$F_n(M)\, e^{-i\omega t - \varkappa_n z}, \tag{12}$$

распространяющуюся вдоль оси z в положительном направлении.

Так как собственные частоты λ_n мембраны неограниченно возрастают с увеличением номера n, то какова бы ни была частота ω, начиная с некоторого номера $n = N$, будем иметь:

$$k^2 < \lambda_n.$$

Следовательно, в волноводе может распространяться лишь конечное число бегущих волн. Если $k^2 < \lambda_1$, то в волноводе не может существовать ни одной бегущей волны.

Для того чтобы в волноводе заданной формы и размеров могла распространяться хотя бы одна бегущая волна, должно, очевидно, выполняться условие

$$\lambda_1 < k^2 \quad \text{или} \quad \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

где Λ — длина волны, распространяющейся в трубе.

Для волновода прямоугольного сечения со сторонами a и b имеем:

$$\lambda_n = \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

и, следовательно, бегущая волна может существовать лишь при условии

$$k > \pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad \text{или} \quad \Lambda < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \tag{14}$$

Решениями уравнений Максвелла могут быть также поля с равной нулю z-составляющей электрического поля

$$E_z = 0. \tag{15}$$

Вводя вектор $\hat{\mathbf{\Pi}} = \hat{\Pi}\mathbf{i}_z$ и полагая

$$\hat{\boldsymbol{E}} = ik \operatorname{rot} \hat{\mathbf{\Pi}}; \quad \hat{\boldsymbol{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\mathbf{\Pi}} + k^2 \hat{\mathbf{\Pi}} \tag{16}$$

$$(\hat{E}_z = 0),$$

убеждаемся, что функция $\Pi(M, z)$ должна определяться из уравнения

$$\Delta\hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_2\hat{\Pi} + \frac{\partial^2\hat{\Pi}}{\partial z^2} + k^2\hat{\Pi} = 0 \tag{17}$$

и граничного условия

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma. \tag{18}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, найдем решения этой задачи

$$\hat{\Pi}_n = \hat{A}_n\hat{\psi}_n(M)\,e^{i\hat{\gamma}_n z} \qquad \left(\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}\right), \tag{19}$$

которым соответствуют решения уравнения Максвелла вида

$$\hat{F}_n(M)\,e^{i(\hat{\gamma}_n z - \omega t)}.$$

Здесь $\hat{\psi}_n(M)$ и $\hat{\lambda}_n$ означают собственные функции и собственные частоты мембраны S со свободной границей

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \ \text{в} \ S,$$

$$\frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad C.$$

Таким образом, в волноводе могут существовать электромагнитные поля двух типов $\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\}$ и $\{\hat{\boldsymbol{E}}, \hat{\boldsymbol{H}}\}$, определяемые по формулам (3) и (16). Принята следующая терминология: говорят об электрических волнах (или волнах типа TM), если $H_z = 0$, или о магнитных волнах (типа TE), если $E_z = 0$. Мы убедились, что в волноводе могут существовать волны TE и TM. Можно показать[1]), что любое поле в волноводе представимо в виде суммы полей TE и TM. Отсюда следует, что произвольное поле в волноводе можно определить, если известны две скалярные функции $\Pi(M, z)$ и $\hat{\Pi}(M, z)$.

2. Найдем величину энергии, уносимой бегущей волной, например типа TM.

Для этого вычислим величину потока вектора Умова — Пойнтинга через сечение S:

$$W_z = \frac{c}{8\pi}\iint\limits_S [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}^*]_z\,dS, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{H}^*$ — вектор, комплексно-сопряженный вектору $\boldsymbol{H}$, S — перпендикулярное сечение волновода.

[1]) А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Вестник МГУ, вып. 7 (1948).

Введем прямоугольную систему координат x, y, z. Тогда

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \iint\limits_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\,dx\,dy. \tag{21}$$

Выразим составляющие поля через поляризационный потенциал Π по формулам

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial z}, \qquad E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\,\partial z},$$

$$H_x^* = ik\frac{\partial \Pi^*}{\partial y}, \qquad H_y^* = -ik\frac{\partial \Pi^*}{\partial x}$$

и подставим их значения в равенство (21)

$$W_z = -\frac{c}{8\pi} ik \iint\limits_S \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial \Pi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial \Pi^*}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{22}$$

Функция Π и сопряженная ей функция Π^* согласно (10) представимы в виде

$$\Pi(M, z) = A_n \psi_n(M)\, e^{i\gamma_n z},$$

$$\Pi^*(M, z) = A_n^* \psi_n(M)\, e^{-i\gamma_n z},$$

где ψ_n — собственная функция закрепленной мембраны ($\psi_n|_C = 0$). Отсюда следует, что вместо (22) можно написать

$$W_z = \frac{ck}{8\pi}\gamma_n |A_n|^2 \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= \frac{ck}{8\pi}\gamma_n |A_n|^2 \int\limits_S (\nabla\psi_n)^2\, dS.$$

Применяя первую формулу Грина

$$\iint\limits_S (\nabla\psi_n)^2\, dS = -\iint\limits_S \psi_n \Delta_2 \psi_n\, dS + \int\limits_C \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu}\, ds = \lambda_n \iint\limits_S \psi_n^2\, dS = \lambda_n,$$

получаем выражение для потока энергии бегущей волны номера n

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} |A_n|^2 \gamma_n \lambda_n. \tag{23}$$

Если одновременно распространяется несколько волн, то W_z будет равно сумме слагаемых вида (23).

Перейдем теперь к задаче о возбуждении электромагнитных полей в волноводе заданными токами[1]).

3. Пусть в некотором объеме V_0 внутри волновода Σ заданы токи $j(M, z)e^{-i\omega t}$, меняющиеся во времени по гармоническому

[1]) А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11, 12 (1947).

закону. Найдем поля, возбуждаемые этими токами. В силу принципа суперпозиции полей достаточно, очевидно, решить задачу о возбуждении волновода элементарным диполем произвольной ориентации.

Чтобы дать представление о методе решения поставленной выше общей задачи, рассмотрим более простой случай возбуждения волновода линейным током $I = I_0(z)e^{-i\omega t}$, заданным на отрезке L, параллельном оси z.

Для определения электромагнитных полей, возбужденных в волноводе, надо использовать:

1) уравнения Максвелла (1),

2) граничные условия

$$E_{\text{tang}} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

3) условие излучения в виде требования отсутствия волн, приходящих из бесконечности,

4) условие возбуждения, которое мы берем в виде[1])

$$\oint\limits_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I_0 \quad \text{или} \quad H_s \approx \frac{2I_0}{c\rho}, \tag{24}$$

где K_ε — окружность радиуса $\varepsilon\,(\varepsilon \to 0)$, охватывающая линию L, $\rho = |\overrightarrow{MM_0}|$, где M_0 — точка на токе, M — точка на окружности K_ε. Иными словами, электромагнитное поле на токе должно иметь особенность определенного типа.

Перейдем к потенциалу П, воспользовавшись для этого формулами (3). Пусть (M_0, ξ) — произвольная точка на токе. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с центром в точке (M_0, ξ) и вычислим H_s, пользуясь уравнением (3),

$$H_s = ik \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

Отсюда и из (24) следует, что в точке (M_0, ξ) функция П должна иметь логарифмическую особенность

$$\Pi \approx -\frac{2I_0}{ikc} \ln \frac{1}{\rho}. \tag{25}$$

Таким образом, функция $\Pi(M, z)$ должна удовлетворять волновому уравнению (4), граничному условию $\Pi = 0$ на Σ, условию излучения и условию возбуждения (25).

Будем искать решение этой задачи в виде

$$\Pi = K \int\limits_L \Pi_0(M, M_0; z, \zeta)\, I_0(\zeta)\, d\zeta, \tag{26}$$

---

[1]) См. главу V, приложение II, п. 3.

где $\Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)$ — функция источника, определяемая как решение уравнения

$$\Delta\Pi_0 + k^2\Pi_0 = 0$$

по переменным (M, z) и (M_0, ζ), удовлетворяющее граничному условию

$$\Pi_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

условию излучения и имеющее особенность типа $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$ при совпадении аргументов, т. е. представимое в виде суммы

$$\Pi_0(M, M;\ z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v(M, M_0;\ z, \zeta)$$

$$\left(r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},\ \rho = |\overrightarrow{MM_0}|\right),$$

где v — регулярная функция, определяемая из волнового уравнения и граничного условия

$$v = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Нетрудно видеть, что функция $\Pi(M, z)$, определяемая по формуле (26), будет иметь логарифмическую особенность, и условие возбуждения выполнится, если положить нормирующий множитель

$$K = -\frac{4\pi}{ikc}.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc}\int\limits_L \Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)\, I_0(\zeta)\, d\zeta.$$

В частности, для элемента тока длины Δl

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc} I_0 \cdot \Delta l \cdot \Pi_0.$$

Следовательно, Π_0 имеет физический смысл *поляризационного потенциала*, соответствующего возбуждению элементом тока, помещенным в точке (M_0, ζ) параллельно оси волновода.

Таким образом, задача определения поля в волноводе полностью сведена к построению функции источника Π_0 первой краевой задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри бесконечного цилиндра.

Для построения функции источника может быть применен метод, изложенный в главе VI, § 2. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u + k^2 u = -f(M, z), \tag{27}$$

где $f(M, z)$ — заданная функция с граничным условием

$$u|_\Sigma = 0.$$

Будем искать функцию $u(M, z)$ в виде ряда

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\psi_n(M), \tag{28}$$

где $\psi_n(M)$ — нормированные собственные функции мембраны S

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0, \quad \psi_n|_C = 0. \tag{7}$$

Разлагая $f(M, z)$ в ряд

$$f(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\psi_n(M), \quad f_n(z) = \iint_S f(M', z)\psi_n(M')\,d\sigma_{M'} \tag{29}$$

и подставляя выражения (28) и (29) в уравнение (27), получаем уравнение

$$u_n''(z) - p_n^2 u_n(z) = -f_n(z), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}. \tag{30}$$

Решение этого уравнения, как нетрудно заметить, представляется формулой

$$u_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f_n(\zeta)\,d\zeta, \tag{31}$$

которая в силу формулы (29) может быть записана в виде

$$u_n(z) = \iint_S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f(M', \zeta)\psi_n(M')\,d\sigma_{M'}\,d\zeta. \tag{31'}$$

Подставляя это выражение в формулу (28) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(M, z) = \iiint_T \Pi_0(M, M', z-\zeta) f(M', \zeta)\,d\sigma_{M'}\,d\zeta, \tag{32}$$

где

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}. \tag{33}$$

Ряд для $\Pi_0(M, M', z-\zeta)$ при $z \neq \zeta$ равномерно и абсолютно сходится в силу оценок для собственных функций [1]) и присутствия экспоненциального множителя. Функция $\Pi(M, M', z-\zeta)$ в точке $(M=M',\ z=\zeta)$ имеет особенность типа $1/r$. На доказательстве последнего утверждения мы не останавливаемся [2]). Из сказанного выше следует, что

$$G(M, M', z-\zeta)=\Pi_0(M, M', z-\zeta),$$

т. е. функция источника Π_0 имеет вид

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\,\psi_n(M')}{2p_n}e^{-p_n|z-\zeta|}.$$

Из формулы (33) следует, что поле в этом случае представится в виде суперпозиции волн вида (11) и (12). Из замечания на стр. 526 следует, что ряд (33) будет состоять из конечного числа слагаемых вида

$$B_n\psi_n(M)e^{i\gamma_n|z-\zeta|}\quad \text{(бегущие волны)}\quad \left(\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n},\ p_n=-i\gamma_n\right)$$

и из бесконечного числа слагаемых вида

$$B'_n\psi_n(M)e^{-p_n|z-\zeta|}\quad \text{(затухающие волны)},$$

где

$$B'_n=\frac{\psi_n(M')}{2p_n},\quad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2},\quad \lambda_n>k^2.$$

Для определения полей надо воспользоваться формулами (26) и (3).

---

[1]) Для собственных функций $\psi_n(M)$ имеет место равномерная оценка $|\psi_n(M)|\leqslant A\lambda_n$, где A — постоянная, не зависящая ни от точки M, ни от индекса n. В самом деле, краевая задача (7) равносильна интегральному уравнению $\psi_n(M)=\lambda_n\iint\limits_S G(M, M')\,\psi_n(M')\,d\sigma_{M'}$, где $G(M, M')$ — функция источника для уравнения Лапласа $\Delta_2 u=0$ при граничном условии $u|_C=0$. Из этого интегрального уравнения вытекает в силу неравенства Буняковского

$$|\psi_n|\leqslant|\lambda_n|\sqrt{\iint\limits_S G^2(M, M')\,d\sigma_{M'}\iint\limits_S \psi_n^2(M')\,d\sigma_{M'}}\leqslant A|\lambda_n|,$$

так как

$$\iint\limits_S \psi_n^2(M')\,d\sigma_{M'}=1;\quad \iint\limits_S G^2(M, M')\,d\sigma_{M'}\leqslant A^2.$$

Аналогичным методом получаются оценки для производных

$$\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial x}\right|\leqslant B\lambda_n^2,\quad \left|\frac{\partial\psi_n}{\partial y}\right|\leqslant B\lambda_n^2.$$

[2]) См. А. А. Самарский и А. Н. Тихонов, ЖТФ 27, вып. 11 (1947).

Задача о возбуждении волновода элементом магнитного тока, параллельным оси z (бесконечно малая петля с электрическим током в плоскости $S_{z=\zeta}$), приводит нас ко второй функции источника

$$\hat{\Pi}_0(M, M'; z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\,\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{p}_n}e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|},\quad \hat{p}_n=\sqrt{\hat{\lambda}_n-k^2},$$

удовлетворяющей граничному условию $\frac{\partial\hat{\Pi}_0}{\partial\nu}=0$ на Σ. При этом $H_z=0$; $\hat{\Pi}=-\frac{4\pi}{ikc}k\Delta l\hat{\Pi}_0$ ($k\Delta l$ — момент элемента магнитного тока).

Аналогичным методом можно решить задачу о возбуждении произвольно ориентированным диполем (элементом тока), найдя особенности полей в этом случае. Соответствующие функции Π будут определяться по формуле, аналогичной формуле (33). В случае поверхностных и объемных токов функции Π даются поверхностными и объемными интегралами (по аналогии с (26)). Дальнейшее вычисление полей производится по формулам (3).

Тем самым задача о возбуждении любого цилиндрического волновода произвольными заданными токами решается полностью. Чтобы использовать общие формулы для волновода определенного сечения, достаточно найти собственные колебания мембраны, имеющей форму перпендикулярного сечения волновода.

Приведем выражения для ортонормированных собственных функций прямоугольной мембраны со сторонами a и b:

$$\psi_n(M)=\psi_{nm}(x, y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}y;$$

$$\hat{\psi}_n(M)=\hat{\psi}_{nm}(x, y)=\sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}y\quad(\varepsilon_j=2,\ j\neq 0;\ \varepsilon_0=1);$$

$$\lambda_{mn}=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right).$$

Для круглой мембраны радиуса a имеем:

$$\psi_n(M)=\psi_{mn}(r, \varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\frac{J_n\left(\mu_{mn}\frac{r}{a}\right)}{|J'_n(\mu_{mn})|}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M)=\hat{\psi}_{mn}(r, \varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}_{mn}^2-n^2}}\frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_{mn}}{a}r\right)}{|J_n(\hat{\mu}_{mn})|}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\varphi,$$

где μ_{mn} — корень уравнения $J_n(\mu)=0$; $\lambda_{mn}=\mu_{mn}^2/a^2$, $\hat{\mu}_{mn}$ — корень уравнения $J'_n(\mu)=0$; $\hat{\lambda}_{mn}=\hat{\mu}_{mn}^2/a^2$.