II. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

В последние годы в радиотехнике получили широкое распространение объемные резонаторы или эндовибраторы, представляющие собой металлические полости, заполненные диэлектриком (в частности, воздухом). В эндовибраторах могут существовать стационарные электромагнитные поля (стоячие волны), называемые собственными электромагнитными колебаниями.

В радиотехнике ультракоротких волн применяются эндовибраторы весьма сложной формы. Общая проблема определения собственных колебаний эндовибраторов произвольной формы чрезвычайно сложна, однако для эндовибраторов простейшей формы решение получается в явном виде. Так как стенки изготовляются из хорошо проводящего металла, то при расчете собственных колебаний обычно предполагают стенки идеально проводящими. Поправки на конечную проводимость можно получить, используя граничные условия Леонтовича. В дальнейшем мы будем предполагать, что стенки эндовибратора являются идеально проводящими и все величины поля меняются во времени по закону $e^{-i\omega t}$.

Не ставя своей целью дать исчерпывающее изложение теории эндовибраторов, остановимся на некоторых общих вопросах теории этих колебательных систем.

1. Собственные колебания цилиндрического эндовибратора. Проблема определения собственных электромагнитных колебаний состоит в нахождении нетривиальных решений уравнений Максвелла[1]), точнее в определении собственных частот ω, при которых система однородных уравнений Максвелла с однородными краевыми условиями имеет нетривиальные решения, а также самих нетривиальных решений.

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= -ik\boldsymbol{E}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= ik\boldsymbol{H}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \right\} \tag{1}$$

внутри полости T, на поверхности которой Σ выполняются условия

$$E_t = 0 \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \nu} = 0; \tag{3}$$

оба эти условия, как нетрудно показать, эквивалентны.

[1]) Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем.

Приведем расчет собственных колебаний для эндовибратора, представляющего «отрезок» цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченный двумя боковыми стенками $z = \pm l$ (ось z параллельна образующей цилиндра).

Так же как и в цилиндрическом волноводе, в рассматриваемом эндовибраторе возможны колебания и электрического типа ($H_z = 0$) и магнитного типа ($E_z = 0$).

Для волн электрического типа положим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi}, \\ \boldsymbol{H} &= -ik\operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z$ ($\boldsymbol{i}_z$ — единичный вектор, направленный по оси z) — поляризационный вектор-потенциал, у которого отлична от нуля лишь составляющая по оси z. Из формулы (4) сразу видно, что в этом случае $H_z = 0$.

Функция Π, как обычно, удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0. \tag{5}$$

Выберем на поверхности Σ локальную прямоугольную систему координат ($\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{i}_z$), где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности, $\boldsymbol{s}$ — по касательной к контуру C, ограничивающему перпендикулярное сечение S цилиндрического эндовибратора.

В силу граничных условий (2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} E_s|_\Sigma &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\bigg|_\Sigma = 0, \\ E_z|_\Sigma &= \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\bigg|_\Sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Оба эти равенства будут удовлетворены, если потребовать, чтобы

$$\Pi|_\Sigma = 0. \tag{7}$$

При $z = \pm l$ из (2) получаем условия

$$E_s|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0,$$
$$E_\nu|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial \nu\,\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0,$$

для выполнения которых достаточно положить

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, мы приходим к следующей краевой задаче: *найти нетривиальные решения волнового уравнения*

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \tag{6'}$$

с однородными граничными условиями

$$\Pi|_{\Sigma} = 0, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

Как и в случае цилиндрического волновода (см. стр. 524), решение ищем в виде

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (6′) и используя условие (7), получаем для функции $\psi(M)$ задачу о собственных колебаниях закрепленной мембраны,

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \text{ в } S, \tag{10}$$

$$\psi = 0 \text{ на } C. \tag{11}$$

Для определения функции $f(z)$ после разделения переменных получаем уравнение

$$f'' + (k^2 - \lambda) f = 0 \tag{12}$$

с граничным условием

$$f'(\pm l) = 0, \tag{13}$$

вытекающим из условия (8).

Следует иметь в виду, что здесь, в отличие от задачи для волноводов, k^2 не является заданной величиной, а входит в уравнение в качестве параметра. Мы должны найти те значения k^2, при которых задача (6) — (8) допускает нетривиальное решение.

Решая уравнение (12) с условиями (13), находим собственные функции

$$f_m(z) = A_m \cos \frac{\pi m}{2l}(l - z),$$

соответствующие собственным значениям

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

где

$$\mu_m = k_m^2 - \lambda.$$

Краевая задача (10) — (11) дает спектр собственных значений $\{\lambda_n\}$ с соответствующей системой нормированных собственных функций $\{\psi_n(M)\}$. Отсюда вытекает, что в эндовибраторе могут существовать только такие колебания, собственные или резонансные частоты которых равны

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\lambda_n + \mu_m}.$$

Этим частотам соответствует система собственных функций

$$\Pi_{n,m}(M, z) = \bar{A}_{n,m}\psi_n(M)\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z) \tag{14}$$

или

$$\Pi_{n,m}(M, z) = A_{n,m}\psi_n(M) f_m(z), \tag{14'}$$

где

$$f_m(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2l}}\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2; & m \neq 0; \\ 1; & m = 0, \end{cases}$$

— нормированные к единице функции. Решение определено с точностью до амплитудного множителя $A_{n,m}$, который находится из условий возбуждения колебания данного типа.

Если собственные функции мембраны $\psi_n(M)$ известны, то по формулам (14) и (4) можно вычислить компоненты поля.

Если поперечное сечение S эндовибратора представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, то будем иметь:

$$\psi_n(M) = \psi_{p,q}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi p}{a}x\sin\frac{\pi q}{b}y \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lambda_n = \lambda_{p,q} = \pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right),$$

$$\Pi_{n,m} = A_{m,p,q}\sqrt{\frac{2\varepsilon_m}{abl}}\sin\frac{\pi p}{a}x\sin\frac{\pi q}{b}y\cos\frac{\pi m}{2l}(l - z).$$

В этом случае наименьшей собственной частоте

$$\omega_{0,1,1} = c\sqrt{\lambda_{1,1}} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

соответствует максимальная допустимая длина волны

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

В частности, при $b = a$ наибольшая длина волны

$$\Lambda_0 = a\sqrt{2}$$

равна диагонали квадрата, получающегося в перпендикулярном сечении. Следовательно, в таком эндовибраторе возможны лишь собственные колебания с частотой

$$\omega \geqslant \omega_{0,1,1}$$

или длиной волны

$$\Lambda \leqslant \Lambda_0.$$

Совершенно аналогично находятся собственные колебания магнитного типа ($E_z = 0$). В этом случае полагаем

$$\boldsymbol{E} = ik \operatorname{rot} \hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\Pi}} + k^2 \hat{\boldsymbol{\Pi}},$$

где

$$\hat{\boldsymbol{\Pi}} = \hat{\Pi} \boldsymbol{i}_z.$$

Для определения $\hat{\Pi}(M, z)$ получаем уравнение (6) с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{7'}$$

$$\hat{\Pi} \,|_{z=\pm l} = 0, \tag{8'}$$

решая которые находим:

$$\hat{\Pi}_{n,m} = \hat{A}_{n,m} \hat{\psi}_m(M) \sin \frac{\pi m}{2l}(l - z). \tag{15}$$

В этом случае под $\hat{\psi}_n(M)$ следует понимать собственные функции мембраны S при граничном условии $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \nu} = 0$ на C.

2. Электромагнитная энергия собственных колебаний. Вычислим энергию электрического и магнитного полей в стоячей волне в цилиндрическом эндовибраторе.

Для простоты ограничимся случаем волны электрического типа. Учитывая в формулах (4) зависимость $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ от времени по закону $e^{-i\omega t}$ и беря только действительную часть, получаем:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial x} \cos \omega t, \\ E_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial y} \cos \omega t, \\ E_z &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right) \cos \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -k \frac{\partial \Pi}{\partial y} \sin \omega t, \\ H_y &= k \frac{\partial \Pi}{\partial x} \sin \omega t, \\ H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для вычисления энергии электрического и магнитного полей воспользуемся известными формулами

$$\mathscr{E}_{\text{эл}}(t)=\frac{c}{8\pi}\iiint_T \boldsymbol{E}^2\,d\tau, \tag{18}$$

$$\mathscr{E}_{\text{м}}(t)=\frac{c}{8\pi}\iiint_T \boldsymbol{H}^2\,d\tau, \tag{19}$$

где интегрирование производится по объему T эндовибратора.

Подставляя в формулу (18) выражения (16) и пользуясь формулой (14′), будем иметь[1]:

$$\mathscr{E}_{\text{эл}}(t)=\frac{A^2c}{8\pi}\cos^2\omega t\left\{\iint_S\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma\int_{-l}^{l}[f'(z)]^2\,dz+\right.$$
$$\left.+\iint_S\psi^2\,d\sigma\int_{-l}^{l}(f''+k^2f)^2\,dz\right\}.$$

Производя несложные вычисления, получим:

$$\int_{-l}^{l}[f'(z)]^2\,dz=ff'\Big|_{-l}^{l}-\int_{-l}^{l}ff''\,dz=(k^2-\lambda)\int_{-l}^{l}f^2\,dz=k^2-\lambda, \tag{19′}$$

$$\int_{-l}^{l}(f''+k^2f)^2\,dz=\lambda^2\int_{-l}^{l}f^2\,dz=\lambda^2, \tag{20}$$

так как в силу нормировки функций f

$$\int_{-l}^{l}f^2\,dz=1. \tag{21}$$

Для вычисления интегралов по S воспользуемся первой формулой Грина, уравнением для функции ψ_n, граничными условиями и условием нормировки

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=\iint_S(\nabla_2\psi)^2\,d\sigma=$$
$$=-\iint_S\psi\Delta_2\psi\,d\sigma+\int_C\psi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,ds=\lambda\iint_S\psi^2\,d\sigma=\lambda, \tag{22}$$

где ∇_2 — оператор «набла» в плоскости S, Δ_2 — двумерный оператор Лапласа. В результате получаем выражение для энергии

[1]) Значки m, n мы временно опускаем.

электрического поля

$$\mathscr{E}_{\text{эл}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 \omega t. \tag{23}$$

Для энергии магнитного поля в силу формул (17), (19) и (14′) имеем:

$$\mathscr{E}_{\text{м}}(t) = \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \int\limits_{-l}^{l} f^2\, dz \sin^2 \omega t,$$

откуда, учитывая равенства (21) и (22), находим:

$$\mathscr{E}_{\text{м}}(t) = \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \lambda \sin^2 \omega t. \tag{24}$$

Полная энергия электромагнитного поля, очевидно, не меняется во времени:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{эл}}(t) + \mathscr{E}_{\text{м}}(t) = \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \lambda. \tag{25}$$

Из формул (23) и (24) видно, что в стоячей волне происходит взаимное превращение электрической энергии в магнитную и обратно, причем средняя за период энергия электрического поля

$$\bar{\mathscr{E}}_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E} \tag{26}$$

равна средней энергии магнитного поля

$$\bar{\mathscr{E}}_{\text{м}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 ck^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E}. \tag{27}$$

3. Возбуждение колебаний в эндовибраторе. Для возбуждения поля в эндовибраторе внешним источником надо ввести через щель в его оболочке элемент связи. Таким элементом связи может быть либо виток, либо стержень, действующий как маленькая антенна. Для того чтобы элемент связи не возмущал поля в эндовибраторе, необходимо, чтобы его размеры были много меньше длины волны. Возможны и другие способы возбуждения эндовибратора, например пучком электронов, пронизывающим полость эндовибратора (через отверстия в его стенках).

Решение задачи о возбуждении эндовибратора антенной, помещенной внутрь, или в предельном случае элементарным диполем, требует учета конечной проводимости стенок. В противном случае установившийся процесс невозможен. Учет конечной проводимости стенок может быть произведен с помощью условий Леонтовича.

Мы рассмотрим здесь задачу о возбуждении сферического эндовибратора диполем, допускающую простое аналитическое решение[1]). Пусть в центре сферы радиуса r_0 помещен диполь, колеблющийся с частотой ω и амплитудой 1 и направленный вдоль оси z. Требуется найти поле внутри сферы, учитывая конечную проводимость стенок.

В этом случае поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через функцию U:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{i}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ E_\theta &= -\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ H_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Остальные компоненты E_φ, H_r, H_θ равны нулю.

Так как диполь направлен по оси z $(\theta = 0)$, то поля, очевидно, не должны зависеть от угла φ.

Функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + U = 0, \tag{29}$$

где $\rho = kr$, причем U имеет при $\rho \to 0$ особенность вида

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2} = \frac{ik^2e^{i\rho}}{\rho^2}. \tag{30}$$

На поверхности сферы $(\rho = \rho_0)$ должно выполняться условие Леонтовича

$$E_\theta = aH_\varphi, \tag{31}$$

где

$$a = \mu kd\sqrt{\frac{i}{2}} \quad \left(d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\right) \tag{32}$$

— эффективная глубина скин-слоя.

Из соотношений (31) и (28) вытекает граничное условие для функции U

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U) - i\rho_0 aU\right]_{\rho=\rho_0} = 0$$

или

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} + (1 - i\rho_0 a)\,U\bigg|_{\rho=\rho_0} = 0. \tag{33}$$

Решением уравнения (29), имеющим особенность (30), очевидно, является функция

$$U = -k^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left[H^{(1)}_{3/2}(\rho) + CJ_{3/2}(\rho)\right]P_1(\cos\theta),$$

[1]) См. С. М. Рытов, ДАН СССР 51, вып. 2 (1946).

где $P_1(\cos\theta)$ — полином Лежандра первого порядка, $H_{3/2}^{(1)}$—функция Ханкеля первого рода, $J_{3/2}$ — функция Бесселя,

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$H_{3/2}^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\rho}\left(\frac{1}{i\rho} - 1\right), \quad J_{3/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\sin\rho}{\rho} - \cos\rho\right).$$

Постоянная C определяется из граничного условия (33)

$$C = -e^{i\rho_0}\frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a\left(\frac{1}{i\rho_0} - 1\right)}{i\left[\frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0 - ia\left(\frac{\sin\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0\right)\right]}.$$

Полученное решение можно использовать для определения величины потерь в стенках. Мощность, поглощаемая в стенках,

$$Q = \frac{\mu\omega d}{16\pi}\int_0^\pi |H_\varphi|^2\, 2\pi\rho_0^2 \sin\theta\, d\theta$$

вычисляется непосредственно и равна $Q = \frac{\mu\omega k^4 d}{6}\,\frac{1}{|B - iaA|^2}$, где

$$A = \frac{\sin\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0, \qquad B = \frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\sin\rho_0.$$

Если диполь расположен не в центре сферы, то расчет полей сильно осложняется, однако решение может быть получено в виде рядов.

III. Скин-эффект

Переменный ток в отличие от постоянного не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет бо́льшую плотность у его поверхности. Это явление называют скин-эффектом[1]) (по-английски *skin* — кожа).

Рассмотрим, для простоты, бесконечный однородный цилиндрический провод ($\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$), по которому течет переменный ток. Будем предполагать, что полный ток $I = I_0 e^{i\omega t}$, протекающий через сечение провода, известен.

Пренебрегая токами смещения по сравнению с током проводимости[2]) и считая процесс установившимся, т. е. зависящим

---

[1]) И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

[2]) Отметим, что внутри проводников, в частности внутри металлов, плотность токов смещения ничтожно мала по сравнению с плотностью токов проводимости: $j_{\text{см}} \ll j = \sigma E$. В нашем случае последнее условие эквивалентно требованию $\varepsilon\omega \ll \sigma$. Ввиду того, что для твердых металлов проводимость $\sigma \approx 10^{17}$ абс. ед., токами смещения можно пренебречь для всех частот, употребляемых в технике.