

где $P_1(\cos \theta)$ — полином Лежандра первого порядка, $H_{1/2}^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, $J_{1/2}$ — функция Бесселя,

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$H_{1/2}^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\rho} \left(\frac{1}{i\rho} - 1 \right), \quad J_{1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \left(\frac{\sin \rho}{\rho} - \cos \rho \right).$$

Постоянная C определяется из граничного условия (33)

$$C = -e^{i\rho_0} \frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a \left(\frac{1}{i\rho_0} - 1 \right)}{i \left[\frac{\cos \rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin \rho_0 - ia \left(\frac{\sin \rho_0}{\rho_0} - \cos \rho_0 \right) \right]}.$$

Полученное решение можно использовать для определения величины потерь в стенках. Мощность, поглощаемая в стенках,

$$Q = \frac{\mu\omega d}{16\pi} \int_0^\pi |H_\varphi|^2 2\pi\rho_0^2 \sin \theta d\theta$$

вычисляется непосредственно и равна $Q = \frac{\mu\omega k^4 d}{6} \frac{1}{|B - iaA|^2}$, где

$$A = \frac{\sin \rho_0}{\rho_0} - \cos \rho_0, \quad B = \frac{\cos \rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin \rho_0.$$

Если диполь расположен не в центре сферы, то расчет полей сильно осложняется, однако решение может быть получено в виде рядов.

III. Скин-эффект

Переменный ток в отличие от постоянного не распределяется равномерно по сечению проводника, а имеет большую плотность у его поверхности. Это явление называют скин-эффектом¹⁾ (по-английски *skin* — кожа).

Рассмотрим, для простоты, бесконечный однородный цилиндрический провод ($\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$), по которому течет переменный ток. Будем предполагать, что полный ток $I = I_0 e^{i\omega t}$, протекающий через сечение провода, известен.

Пренебрегая токами смещения по сравнению с током проводимости²⁾ и считая процесс установившимся, т. е. зависящим

¹⁾ И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

²⁾ Отметим, что внутри проводников, в частности внутри металлов, плотность токов смещения ничтожно мала по сравнению с плотностью токов проводимости: $j_{em} \ll j = \sigma E$. В нашем случае последнее условие эквивалентно требованию $\epsilon\omega \ll \sigma$. Ввиду того, что для твердых металлов проводимость $\sigma \approx 10^{17}$ абс. ед., токами смещения можно пренебречь для всех частот, употребляемых в технике.

от времени по закону $e^{i\omega t}$, получим, после сокращения на множитель $e^{i\omega t}$, уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik\mu\mathbf{H}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

где $k = \omega/c$. Уравнения (3) и (4) в данном случае, очевидно, следуют из уравнений (1) и (2).

Введем цилиндрическую систему координат (r, z, φ) , так чтобы ось z совпадала с осью провода. Тогда в силу осевой симметрии тока все величины можно считать зависящими только от переменной r .

Так как в нашем случае вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси z , то из уравнений (1) и (2) будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rH_\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z, \quad (1')$$

$$\frac{d}{dr} E_z = ik\mu H_\varphi. \quad (2')$$

Исключая отсюда H_φ , найдем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) = i \frac{4\pi\sigma\mu k}{c} E_z. \quad (5)$$

Введем граничное условие на поверхности провода при $r = R$. Для этого воспользуемся тем, что нам известен полный ток I_0 , протекающий по цилиндру.

Запишем первое уравнение Максвелла (1) в интегральной форме:

$$\oint_C H_s ds = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

где C — контур, охватывающий провод, H_s — тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} на C . Если в качестве такого контура взять окружность $r = R$, то получим:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R) d\varphi = \frac{4\pi}{cR} I_0$$

или

$$H_{\varphi}(R) = \frac{2I_0}{cR}. \quad (6)$$

Отсюда, пользуясь соотношением (2), находим:

$$\left. \frac{dE_z}{dr} \right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} I_0. \quad (7)$$

Таким образом, мы должны решить уравнение Бесселя

$$E_z''(r) + \frac{1}{r} E_z'(r) + (\alpha \sqrt{-i})^2 E_z(r) = 0 \quad \left(\alpha^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} \right) \quad (5')$$

при граничном условии

$$E_z'(R) = \frac{2ik\mu}{cR} I_0 \quad (7')$$

и условии ограниченности при $r = 0$

$$|E_z(0)| < \infty. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (5') имеет вид

$$AJ_0(\alpha r \sqrt{-i}) + BN_0(\alpha r \sqrt{-i}), \quad (9)$$

где J_0 и N_0 — функции Бесселя первого и второго рода (см. Дополнение II, ч. I), A и B — постоянные, подлежащие определению.

Функция N_0 имеет логарифмическую особенность при $r = 0$. Поэтому в силу условия (8) $B = 0$ и, следовательно,

$$E_z(r) = AJ_0(\alpha r \sqrt{-i}). \quad (10)$$

Коэффициент A определим из граничного условия (7):

$$A = \frac{2\sqrt{-i} k\mu I_0}{\alpha c R J_1(\alpha R \sqrt{-i})}. \quad (11)$$

Отсюда для плотности тока

$$j = \sigma E_z$$

получаем:

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha \sqrt{-i}}{2\pi R J_1(\alpha R \sqrt{-i})} J_0(\alpha r \sqrt{-i}). \quad (12)$$

В правой части этой формулы стоят функции Бесселя от комплексного аргумента

$$x \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} x.$$

Обычно пользуются для этих функций следующими обозначениями:

$$J_0(x\sqrt{-i}) = \text{ber}_0 x + i \text{bei}_0 x;$$

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \text{ber}_1 x + i \text{bei}_1 x.$$

Нетрудно найти выражения для вещественных функций $\text{ber } x$ и $\text{bei } x$, пользуясь разложением функций Бесселя в ряд. Например,

$$\begin{aligned} J_0(x\sqrt{-i}) &= J_0(xi\sqrt{i}) = \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (-1)i}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 (-1)}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots = \\ &= \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots \right\} + i \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\text{ber}_0 x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \dots; \quad (13)$$

$$\text{bei}_0 x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \quad (14)$$

Нетрудно убедиться подобным же образом, что

$$\text{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{11 \cdot 2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2! \cdot 3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3! \cdot 4!} + \dots \right\}, \quad (15)$$

$$\text{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{11 \cdot 2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2! \cdot 3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3! \cdot 4!} - \dots \right\}. \quad (16)$$

В приложениях встречаются также производные

$$\text{ber}'_0 x, \quad \text{bei}'_0 x,$$

причем

$$J_1(x\sqrt{-i}) = \sqrt{-i} (\text{bei}'_0 x - i \text{ber}'_0 x). \quad (17)$$

Пользуясь введенными функциями, выражение (12) для тока можно записать в виде

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \frac{\text{ber}_0 \alpha r + i \text{bei}_0 \alpha r}{\text{bei}'_0 \alpha R - i \text{ber}'_0 \alpha R},$$

или

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \left\{ \frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r \operatorname{bei}'_0 \alpha R - \operatorname{bei}_0 \alpha r \operatorname{ber}'_0 \alpha R)}{(\operatorname{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\operatorname{ber}'_0 \alpha R)^2} + i \frac{(\operatorname{bei}_0 \alpha r \operatorname{bei}'_0 \alpha R + \operatorname{ber}_0 \alpha r \operatorname{ber}'_0 \alpha R)}{(\operatorname{bei}'_0 \alpha R)^2 + (\operatorname{ber}'_0 \alpha R)^2} \right\}. \quad (18)$$

Вычисляя абсолютную величину этого выражения, получим:

$$|j(r)| = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R} \sqrt{\frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r)^2 + (\operatorname{bei}_0 \alpha r)^2}{(\operatorname{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\operatorname{bei}'_0 \alpha R)^2}}. \quad (19)$$

Величиной, характеризующей распределение тока по сечению, является отношение

$$\frac{|j(r)|}{|j(R)|} = \sqrt{\frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r)^2 + (\operatorname{bei}_0 \alpha r)^2}{(\operatorname{ber}'_0 \alpha R)^2 + (\operatorname{bei}'_0 \alpha R)^2}}. \quad (20)$$

Произведем расчет распределения тока по сечению для двух частот $\omega_1 = 314$ (50 периодов в сек.), $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$ ($5 \cdot 10^5$ периодов в сек.).

Все изложенные выше выкладки были произведены в гауссовой симметричной системе. Поэтому при переходе к системе СГСЭ следует учесть, что $\mu_{\text{СГСЭ}} = \mu_{\text{гаусс}} \frac{1}{c^2}$. Все остальные величины, входящие в формулы (12), (18), (19) и (20), в обеих системах (гауссовой и СГСЭ) совпадают. Поэтому в системе СГСЭ

$$\alpha^2 = 4\pi c \omega.$$

Для меди $\sigma = 57 \cdot 10^5$ СГСЭ, поэтому $\alpha_1 = 0,4444$ (для ω_1), $\alpha_2 = 44,44$ (для ω_2). Вычислим отношение модулей токов (20) для низкой частоты $\omega_1 = 314$ для двух значений r : $r = 0$ и $r = 0,5 R$. При этом R положим равным единице.

Имея в виду¹⁾, что

$$\operatorname{ber}_0 0 = 1,$$

$$\operatorname{bei}_0 0 = 0,$$

$$\operatorname{ber}_0 0,222 = 1 - 0,000036 + \dots = 0,999964,$$

$$\operatorname{bei}_0 0,222 = 0,0123 - 0,000002 + \dots = 0,012300,$$

$$\operatorname{ber}_0 0,444 = 1 - 0,000061 + \dots = 0,999939,$$

$$\operatorname{bei}_0 0,444 = 0,493 - 0,0003 + \dots = 0,4930,$$

¹⁾ См. также Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964.

найдем, что

$$\left. \frac{j(0)}{j(R)} \right|_{R=1} = 0,9994, \quad \left. \frac{j(0,5R)}{j(R)} \right|_{R=1} = 0,9999,$$

т. е. при небольшой частоте ток распределяется по сечению приблизительно равномерно (скин-эффект отсутствует).

Рассмотрим теперь второй случай: $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$. Так как α велико, то для расчета удобнее исходить не из разложений функций ber и bei в ряды, а из асимптотических формул

$$J_0(\alpha r \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}} e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{2}}} - i \left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right),$$

$$J_0(\alpha R \sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha R}} e^{\frac{\alpha R}{\sqrt{2}}} - i \left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right),$$

откуда получаем, задаваясь значениями $r = 0,9R$; $R = 1$:

$$\left| \frac{j(0,9R)}{j(R)} \right|_{R=1} = \sqrt{\frac{1}{0,9}} e^{-\frac{44}{\sqrt{2}} 0,1} \approx 0,047.$$

Этот результат свидетельствует о чрезвычайно быстром уменьшении плотности тока по мере углубления внутрь проводника при высоких частотах. Отметим в заключение, что скин-эффектом широко пользуются на практике для закалки металлов.

IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли

Проблемы, связанные с распространением радиоволн как в свободном пространстве, так и при наличии поверхностей раздела, имеют огромное теоретическое и практическое значение. Этим вопросам посвящено чрезвычайно большое количество работ советских и иностранных авторов.

Мы рассмотрим задачу о влиянии земли на распространение радиоволн, излучаемых вертикальным диполем. При этом землю будем считать плоской¹⁾.

Пусть над поверхностью земли на расстоянии h в точке P_0 находится диполь, излучающий периодические колебания частоты ω . Примем плоскость земли за плоскость $z = 0$ и направим ось z по оси диполя (рис. 84). Положим,

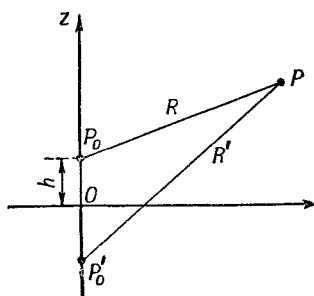


Рис. 84.

¹⁾ Эта задача была впервые решена Зоммерфельдом в 1909 г. Первоначальное решение Зоммерфельда содержало ошибку, которая была исправлена В. А. Фоком.