найдем, что

$$\left.\frac{j(0)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9994, \qquad \left.\frac{j(0{,}5R)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9999,$$

т. е. при небольшой частоте ток распределяется по сечению приблизительно равномерно (скин-эффект отсутствует).

Рассмотрим теперь второй случай: $\omega_2 = 314\cdot 10^4$. Так как α велико, то для расчета удобнее исходить не из разложений функций ber и bei в ряды, а из асимптотических формул

$$J_0(\alpha r\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}} e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$J_0(\alpha R\sqrt{-i}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha R}} e^{\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

откуда получаем, задаваясь значениями $r = 0{,}9\,R$; $R = 1$:

$$\left|\frac{j(0{,}9R)}{j(R)}\right|_{R=1} = \sqrt{\frac{1}{0{,}9}}\, e^{-\frac{44}{\sqrt{2}}0{,}1} \approx 0{,}047.$$

Этот результат свидетельствует о чрезвычайно быстром уменьшении плотности тока по мере углубления внутрь проводника при высоких частотах. Отметим в заключение, что скин-эффектом широко пользуются на практике для закалки металлов.

IV. Распространение радиоволн над поверхностью земли

Проблемы, сязанные с распространением радиоволн как в свободном пространстве, так и при наличии поверхностей раздела, имеют огромное теоретическое и практическое значение. Этим вопросам посвящено чрезвычайно большое количество работ советских и иностранных авторов.

Мы рассмотрим задачу о влиянии земли на распространение радиоволн, излучаемых вертикальным диполем. При этом землю будем считать плоской[1].

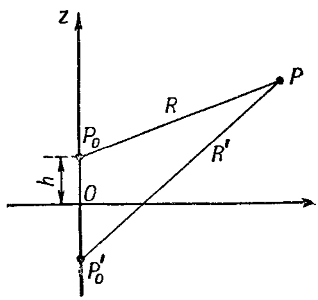

Рис. 84.

Пусть над поверхностью земли на расстоянии h в точке P_0 находится диполь, излучающий периодические колебания частоты ω. Примем плоскость земли за плоскость $z = 0$ и направим ось z по оси диполя (рис. 84). Положим,

[1]) Эта задача была впервые решена Зоммерфельдом в 1909 г. Первоначальное решение Зоммерфельда содержало ошибку, которая была исправлена В. А. Фоком.

что в атмосфере ($z > 0$) $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\sigma_0 = 0$. Предположим далее, что земля ($z < 0$) характеризуется диэлектрической постоянной ε, проводимостью σ, а магнитная проницаемость μ может быть принята равной единице; ε и σ будем считать постоянными.

Наша задача заключается в отыскании напряженности поля, создаваемого диполем. Процесс распространения электромагнитных волн описывается уравнением Максвелла.

Как было показано в Приложении II к гл. V, решение уравнений Максвелла может быть сведено к решению волнового уравнения для поляризационного потенциала Π[1]):

$$\Delta\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi} = 0, \tag{1}$$

где

$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; & z > 0; \\ k_3^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\omega}{c^2}; & z < 0. \end{cases}$$

Потенциал $\mathbf{\Pi}$ связан с напряженностями поля соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= k^2\mathbf{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \\ \boldsymbol{H} &= -i\frac{k^2}{k_0}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В нашем случае вектор $\mathbf{\Pi}$ направлен параллельно излучающему диполю

$$\mathbf{\Pi} = (0,\ 0,\ \Pi_z); \qquad \Pi_z = \Pi_z(r,\ z). \tag{3}$$

Положив

$$n^2 = \varepsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega},$$

получим:

$$k_3^2 = n^2k_0^2.$$

Соотношения (2) и (3) дают:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_0}{\partial z}; \quad H_\varphi = -ik_0\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \quad \text{при} \quad z > 0, \tag{4}$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\Pi_3}{\partial z}; \quad H_\varphi = -\frac{ik_3^2}{k_0}\frac{\partial\Pi_3}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \quad \text{при} \quad z < 0. \tag{5}$$

Чтобы получить граничные условия при $z = 0$, воспользуемся условием непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей. Эти условия, как показывают формулы

[1]) Так как рассматривается установившийся процесс, то временной множитель $e^{-i\omega t}$ можно опустить.

(4) и (5), будут выполнены, если положить:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_3}{\partial z}; \quad \Pi_0 = n^2 \Pi_3 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{6}$$

Будем искать решение уравнения (1) при граничных условиях (6) в виде суперпозиции частных решений вида

$$J_0(\lambda r)\, e^{\pm \mu z} \qquad (k^2 = \lambda^2 - \mu^2).$$

Для неограниченной области вместо дискретного спектра собственных значений λ получается непрерывный спектр. Поэтому решение Π можно искать в виде

$$\Pi = \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\pm \mu z}\, d\lambda; \tag{7}$$

знак у μ должен быть выбран таким образом, чтобы обеспечивалась сходимость интеграла (7). Остающаяся пока неопределенной функция $F(\lambda)$ представляет собой амплитудный множитель отдельных колебаний.

Воспользуемся интегральным представлением потенциала (см. Дополнение II, ч. I, § 5)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu |z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}$$

$$\left(\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}\right). \tag{8}$$

Рассмотрим две различные области:

а) Воздух ($z > 0$). Поле в этой области будет иметь вид

$$\Pi_0 = \Pi_{\text{перв}} + \Pi_{\text{втор}},$$

где

$$\Pi_{\text{перв}} = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{9}$$

— потенциал поля первичного возбуждения, создаваемого самим диполем, а $\Pi_{\text{втор}}$ — потенциал поля вторичного возбуждения, создаваемого возникающими в земле токами.

Используя представления (7), (8) и (9), мы можем записать:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{\text{перв}} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu |z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{втор}} &= \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu (z+h)}\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $F(\lambda)$ — пока что неопределенная функция.

б) Земля ($z<0$). В этой области имеет место только вторичное возбуждение, которое мы можем записать в виде

$$\Pi_3=\int_0^\infty F_3(\lambda)J_0(\lambda r)e^{\mu_3 z-\mu h}\,d\lambda, \tag{11}$$

где $\mu_3^2=k_3^2-\lambda^2$. Так как $z<0$, то знак показателя экспоненты обеспечит сходимость интеграла.

Для определения функций $F(\lambda)$ и $F_3(\lambda)$ воспользуемся граничными условиями (6), которые дают:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu h}[\lambda-\mu F(\lambda)-\mu_3F_3(\lambda)]\,d\lambda=0,\\&\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu h}[\lambda+\mu F(\lambda)-n^2\mu F_3(\lambda)]\frac{d\lambda}{\mu}=0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Условия (12) будут выполнены, если мы положим

$$\left.\begin{aligned}\mu F(\lambda)+\mu_3F_3(\lambda)&=\lambda,\\\mu F(\lambda)-n^2\mu F_3(\lambda)&=-\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Решая уравнение (13), найдем $F(\lambda)$ и $F_3(\lambda)$ в виде

$$\left.\begin{aligned}F(\lambda)&=\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{2\mu_3}{n^2\mu+\mu_3}\right);\\F_3(\lambda)&=\frac{2\lambda}{n^2\mu+\mu_3}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подставляя полученное выражение (14) в формулы (10) и (11), получим следующие выражения для поляризационного потенциала поля вертикального диполя:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_0=&\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu|z-h|}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu}+\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu|z+h|}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu}-\\&\qquad-2\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu(z+h)}\frac{\mu_3}{n^2\mu+\mu_3}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu};\\\Pi_3=&\,2\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{\mu_3z-\mu h}\frac{\lambda\,d\lambda}{n^2\mu+\mu_3}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Обозначая через $R=\sqrt{r^2+(z-h)^2}$ расстояние от точки наблюдения до диполя, через $R'=\sqrt{r^2+(z+h)^2}$ расстояние от точки наблюдения до зеркального отражения диполя в плоскости $z=0$ и пользуясь представлением (8), перепишем выражение для функции Π_0 в виде

$$\Pi_0=\frac{e^{ikR}}{R}+\frac{e^{ikR'}}{R'}-2\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{-\mu(z+h)}\frac{\mu_3}{n^2\mu+\mu_3}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu}. \qquad (15')$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

1) Идеально проводящая земля. В этом случае $\sigma\to\infty$, а следовательно, $|k_3|$ и $|n|\to\infty$. При этом формулы (15) и (15′) дают:

$$\Pi_0=\frac{e^{ikR}}{R}+\frac{e^{ikR'}}{R'};\qquad \Pi_3=0.$$

Этот же результат легко получить непосредственно, решая задачу методом отражений.

2) Диполь в однородной среде. В этом случае $k_0=k_3$; $n=1$; $\mu=\mu_3$. Формулы (15) и (15′) дают:

$$\Pi_0=\Pi_3=\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{-\mu|z-h|}\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu}=\frac{e^{ikR}}{R},$$

т. е. имеет место одно первичное возбуждение, как и должно быть.

Полученные интегральные выражения (15) являются весьма сложными для исследования и практического применения. Подинтегральные выражения имеют точки ветвления и полюсы. Зоммерфельдом был предложен метод приближенного вычисления этих интегралов путем деформации контура интегрирования[1]). При этом им была получена следующая приближенная формула для поля вблизи поверхности земли:

$$\Pi_0=2\frac{e^{ik_0r}}{r}\left(1+i\sqrt{\pi\rho}\,e^{-\rho}-2\sqrt{\rho}\,e^{-\rho}\int\limits_0^{\sqrt{\rho}}e^{\alpha^2}\,d\alpha\right), \qquad (16)$$

где величина ρ — так называемое «численное расстояние» — связано с полюсом p подынтегрального выражения (15) соотношением

$$\rho=i(k_0-p)\,r.$$

Формула (16) совпадает с формулами, полученными совершенно иным путем рядом других авторов (Вейль, Ван-дер-Поль, Фок).

---

[1]) Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. II, 1937.