# Раздел 2
# ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

## §2.1. Ортогональное проектирование

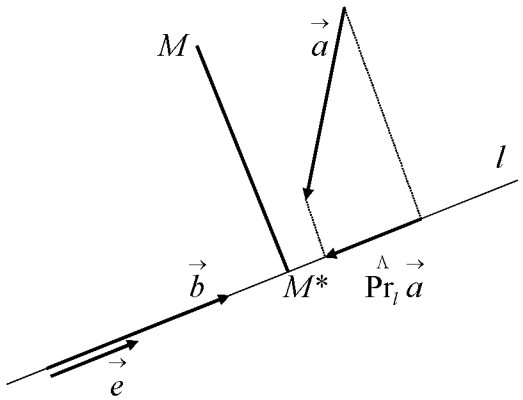


*Рисунок* 2.1.1.

Определение 2.1.1. Прямую $l$, с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{b}$, будем называть *осью.*

Вектор $\vec{b}$ называется *направляющим* вектором оси $l$.

Определение 2.1.2. Пусть дана точка $M$, не лежащая на оси $l$, тогда основание перпендикуляра, опущенного из $M$ на ось $l$ - точку $M^*$ будем называть *ортогональной проекцией* точки $M$ на ось .

Примером оси может служить *ось координат* - прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

Определение 2.1.3. Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось $l$ называется вектор $\hat{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}$, лежащий на оси $l$, начало которого есть ортогональная проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось $l$, а конец - ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$ [1]).

---

[1]) Верхний символ $\hat{}$ будет использоваться для условного обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

Выполним нормировку направляющего вектора $\vec{b}$, то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси $l$. (Рис. 2.1.1.)

Определение 2.1.4. *Численным значением* ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось $l$ называется координата вектора $\hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$.

Определение 2.1.5. *Углом* между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал.

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось $l$ обозначим как $\mathrm{Пр}_l\,\vec{a}$. Из рис. 2.1.2. очевидно, что $\mathrm{Пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi$ есть угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$.

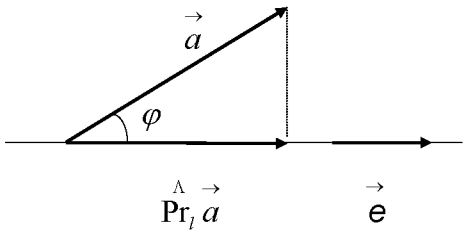


*Рисунок* 2.1.2.

Свойства ортогональных проекций

1.1°. **Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов**

$$\hat{\mathrm{Pr}}_l(\vec{a}_1+\vec{a}_2) = \hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}_1 + \hat{\mathrm{Pr}}_l\,\vec{a}_2 .$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 2.1.3.

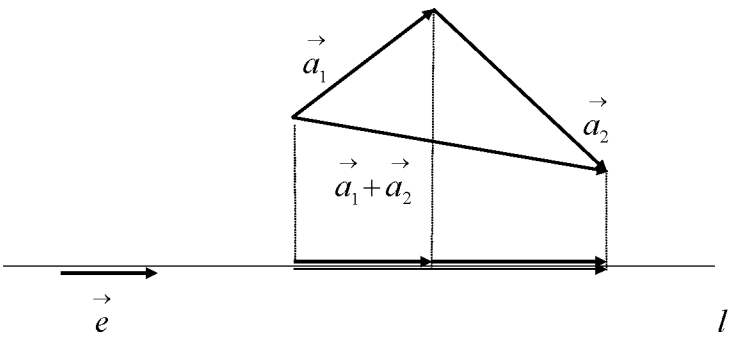


*Рисунок* 2.1.3.

1.2°. **Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число**

$$\overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

**Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций**

$$\overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}_l \vec{a}_2.$$

Справедливость свойств 1° и 2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Свойства численных значений ортогональных проекций

2.1°. $\mathrm{Пр}_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \mathrm{Пр}_l \vec{a}_1 + \mathrm{Пр}_l \vec{a}_2$;

2.2°. $\mathrm{Пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \mathrm{Пр}_l \vec{a}$.

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\mathrm{Пр}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \mathrm{Пр}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \mathrm{Пр}_l \vec{a}_2.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

## §2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 2.2.1.

*Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

В случае, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $(\vec{a},\vec{b})$. По определению: $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi$ - угол между векторами-сомножителями. При этом, согласно определению 2.1.5., $0\le\varphi\le\pi$.

Заметим также, что, если $\vec{b}\ne\vec{o}$, то справедливо равенство $(\vec{a},\vec{b})=\left|\vec{b}\right|\ \mathrm{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a},\vec{b})=0$ при $\vec{a}\ne\vec{o}$ и $\vec{b}\ne\vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *взаимно ортогональны*;

2°. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (*коммутативность*). Следует из определения скалярного произведения и свойств косинуса);

3°. $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b})$ (*дистрибутивность*).

Доказательство:

Если $\vec{b}=\vec{o}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{b}\ne\vec{o}$, тогда

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b})=\left|\vec{b}\right|\mathrm{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\left|\vec{b}\right|\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_1+\left|\vec{b}\right|\mathrm{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}_2=(\vec{a}_1,\vec{b})+(\vec{a}_2,\vec{b}).$$

Свойство доказано.

4°. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b})$;

5°. $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2\ge 0\ \ \forall\vec{a}$; $\ |\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;

(заметим также, что условия $(\vec{a},\vec{a})=0$ и $\vec{a}=\vec{o}$ равносильны);

6°. При $\vec{a}\ne\vec{o}$ и $\vec{b}\ne\vec{o}$ $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$.

## §2.3. Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть задан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные разложения которых в этом базисе имеют вид $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$.

По свойствам 3° и 4° скалярного произведения

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}, \vec{b}) &= (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \ , \ \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) = \\
&= \xi_1\eta_1(\vec{g}_1, \vec{g}_1) + \xi_1\eta_2(\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \xi_1\eta_3(\vec{g}_1, \vec{g}_3) + \\
&+ \xi_2\eta_1(\vec{g}_2, \vec{g}_1) + \xi_2\eta_2(\vec{g}_2, \vec{g}_2) + \xi_2\eta_3(\vec{g}_2, \vec{g}_3) + \\
&+ \xi_3\eta_1(\vec{g}_3, \vec{g}_1) + \xi_3\eta_2(\vec{g}_3, \vec{g}_2) + \xi_3\eta_3(\vec{g}_3, \vec{g}_3) = \\
&= \sum_{j=1}^{3} (\xi_j\eta_1(\vec{g}_j, \vec{g}_1) + \xi_j\eta_2(\vec{g}_j, \vec{g}_2) + \xi_j\eta_3(\vec{g}_j, \vec{g}_3)) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \xi_j\eta_i(\vec{g}_j, \vec{g}_i).
\end{aligned}
$$

В случае *ортонормированного* базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{array}\right.,$$

где $\delta_{ij}$ так называемый *символ Кронекера*. Откуда, для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3,$$

из которой следуют полезные соотношения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

а для $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$ $\quad \cos\varphi = \dfrac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}$.

Отметим, что последнее равенство в сочетании с условием $|\cos\varphi| \leq 1$ приводит к *неравенству Коши-Буняковского* :

$$|\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} \quad ; \quad \forall \ \xi_i, \eta_i \ , \ i = 1, 2, 3 \ .$$

Задача 2.3.1. *Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны радиус-векторы этих точек.*

Решение: Пусть задана ортонормированная система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и радиус-векторы двух точек $\vec{OM}_2 = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ и $\vec{OM}_1 = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$ в ней. Тогда, используя решение задачи 1.7.1., из равенства

$$\vec{M_1M_2} = (\xi_1 - \eta_1)\vec{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\vec{e}_2 + (\xi_3 - \eta_{31})\vec{e}_3$$

и свойств скалярного произведения, получаем

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}\ .$$

## §2.4. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 2.4.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *левой*.

Определение 2.4.2. *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

1°. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi$ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.

3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения 2.4.2. следует, что

1°. $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность, следует из определения 2.4.2. и нечетности функции $\sin\varphi$ )

2°. $[\lambda\vec{a},\vec{b}]=\lambda[\vec{a},\vec{b}]$ (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda\vec{a},\vec{b}]$ и $[\vec{a},\vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda\neq 0$).

3°. $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$ (дистрибутивность).

Для доказательства дистрибутивности векторного произведения воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями:

Лемма 2.4.1. **Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых находятся в общей точке на оси *l*. Тогда результат поворота суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на угол $\varphi$ вокруг оси *l* равен сумме результатов поворота каждого из этих векторов вокруг оси *l* на угол $\varphi$.**

Утверждение леммы 2.4.1. будем обозначать как

$$\hat{\Pi}\text{о в}_{\varphi,l}(\vec{a}+\vec{b})=\hat{\Pi}\text{о в}_{\varphi,l}\,\vec{a}+\hat{\Pi}\text{о в}_{\varphi,l}\,\vec{b}\,.$$

Его справедливость ясна из рис. 2.4.1.

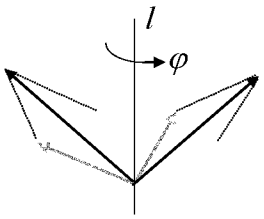


*Рисунок* 2.4.1.

Лемма 2.4.2. **Если $\left|\vec{e}\right|=1$, то вектор $[\vec{p},\vec{e}]$ равен результату поворота *проекции вектора* $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$, вокруг вектора $\vec{e}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.**

Доказательство:

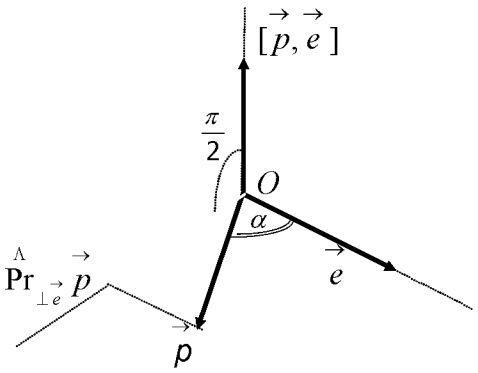


*Рисунок 2.4.2.*

Проведем две плоскости, одна из которых проходит через точку $O$ - общее начало векторов $\vec{p}$ и $\vec{e}$, перпендикулярно $\vec{e}$, а вторая проходит через векторы $\vec{p}$ и $\vec{e}$.

Ортогональная проекция вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{e}$, будет лежать на линии пересечения построенных плоскостей, и тогда из определения векторного произведения следует

$$\left|[\vec{p},\vec{e}\,]\right| = \left|\vec{p}\right|\left|\vec{e}\right|\left|\sin\alpha\right| = \left|\vec{p}\right|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right|,$$

поскольку $\left|\vec{e}\right| = 1$. (Рис. 2.4.2.)

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$[\vec{p},\vec{e}\,] = \hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{e}}\,\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{e}}\,\vec{p},$$

где $\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{e}}\,\vec{p}$ означает ортогональное проектирование вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$.

Лемма доказана.

Докажем теперь дистрибутивность векторного произведения.

Доказательство свойства 3°:

Если $\vec{c} = \vec{o}$, то 3° очевидно.

Пусть $\vec{c} \neq \vec{o}$, тогда в силу утверждений лемм 2.4.1., 2.4.2. и свойства 1.1° из §2.1.

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = |\vec{c}\,|[\vec{a}+\vec{b},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}\,|}] = |\vec{c}\,|\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\,\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) =$$

$$= |\vec{c}\,|(\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}(\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{a}+\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{b})) =$$

$$= |\vec{c}\,|(\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\,\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{a}+\hat{\text{Пов}}_{\frac{\pi}{2},\vec{c}}\,\hat{\mathrm{Pr}}_{\perp\vec{c}}\,\vec{b}) =$$

$$= |\vec{c}\,|([\vec{a},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}\,|}]+[\vec{b},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}\,|}]) = [\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}].$$

Свойство доказано.

## §2.5. Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ такой, что векторы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ образуют правую тройку, и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные разложения которых в этом базисе имеют вид $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$.

По свойствам 2° и 3° векторного произведения

$$
\begin{aligned}
[\vec{a}, \vec{b}] &= [\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \ , \ \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3] = \\
&= \xi_1\eta_1[\vec{g}_1, \vec{g}_1] + \xi_1\eta_2[\vec{g}_1, \vec{g}_2] + \xi_1\eta_3[\vec{g}_1, \vec{g}_3] + \\
&+ \xi_2\eta_1[\vec{g}_2, \vec{g}_1] + \xi_2\eta_2[\vec{g}_2, \vec{g}_2] + \xi_2\eta_3[\vec{g}_2, \vec{g}_3] + \\
&+ \xi_3\eta_1[\vec{g}_3, \vec{g}_1] + \xi_3\eta_2[\vec{g}_3, \vec{g}_2] + \xi_3\eta_3[\vec{g}_3, \vec{g}_3] = \\
&= \sum_{j=1}^{3} (\xi_j\eta_1[\vec{g}_j, \vec{g}_1] + \xi_j\eta_2[\vec{g}_j, \vec{g}_2] + \xi_j\eta_3[\vec{g}_j, \vec{g}_3]) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \xi_j\eta_i[\vec{g}_j, \vec{g}_i].
\end{aligned}
$$

Обозначим через $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ попарные векторные произведения базисных векторов $[\vec{g}_i, \vec{g}_j]$ следующим образом: $\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]$ ; $\vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]$ ; $\vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2]$.

Подставив эти обозначения в выражение для $[\vec{a}, \vec{b}]$ и использовав формулу связывающую определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков (см. теорему 1.1.1.), получим

$$
\begin{aligned}
[\vec{a}, \vec{b}] &= (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\vec{f}_1 - (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1)\vec{f}_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\vec{f}_3 = \\
&= \det\begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix}\vec{f}_1 - \det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix}\vec{f}_2 + \det\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix}\vec{f}_3 = \det\begin{Vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ортонормированный, образующий правую тройку векторов, тогда по определению 2.4.2., $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

Тогда для векторного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем

$$[\vec{a},\vec{b}]=(\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2)\vec{e}_1-(\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1)\vec{e}_2+(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\vec{e}_3=$$

$$=\det\begin{Vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{Vmatrix}\vec{e}_1-\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{Vmatrix}\vec{e}_2+\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{Vmatrix}\vec{e}_3=\det\begin{Vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{Vmatrix}.$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия:

Следствие 2.5.1.

**Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в любой декартовой системе координат**

$$\det\begin{Vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{Vmatrix}=\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{Vmatrix}=\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{Vmatrix}=0\text{, или же, }\frac{\xi_1}{\eta_1}=\frac{\xi_2}{\eta_2}=\frac{\xi_3}{\eta_3}.$$

Следствие 2.5.2.

**В ортонормированной системе координат площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле**

$$S=\sqrt{\det^2\begin{Vmatrix}\xi_2 & \xi_3\\ \eta_2 & \eta_3\end{Vmatrix}+\det^2\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_3\\ \eta_1 & \eta_3\end{Vmatrix}+\det^2\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{Vmatrix}},$$

**причем для плоского случая** $S=\left|\det\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{Vmatrix}\right|$.

## §2.6. Смешанное произведение

Определение 2.6.1.

*Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), называется число ( [$\vec{a}$, $\vec{b}$], $\vec{c}$ ).

Теорема 2.6.1.

**Абсолютная величина смешанного произведения векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. При этом, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарная и правая, то их смешанное произведение положительно, а если тройка некомпланарная и левая, то - отрицательно.**

Доказательство:

Если $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$, тогда, по определению скалярного произведения,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \, \Pi\text{р}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c},$$

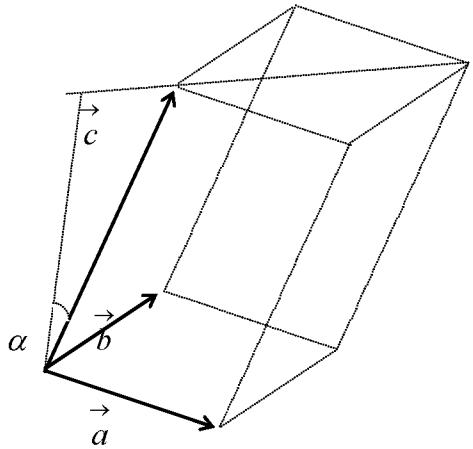


*Рисунок* 2.6.1.

где $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\Pi\text{р}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}| = |\vec{c}||\cos\alpha|$ - высота параллелепипеда с основанием $S$, откуда (см. рис. 2.6.1.)

$$V = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|.$$

Наконец,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \, |\vec{c}| \, \cos\alpha,$$

что и позволяет сделать заключение о знаке смешанного произведения.

Теорема доказана.

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$ ;

2°. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ;

3°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$ ,

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 2.6.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных векторов.

## §2.7. Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, координатные разложения которых в этом базисе имеют вид $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$, $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ и $\vec{c} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$.

По свойствам векторного произведения имеем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} \vec{f}_3 ,$$

где векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ были определены в §2.5.

Из этого определения вытекает, что $(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \left[ \begin{array}{c} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), k = j \\ 0, \ k \neq j \end{array} \right.$, поэтому для $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, получим

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left( \kappa_1 \det \begin{Vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{Vmatrix} - \kappa_2 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{Vmatrix} + \kappa_3 \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{Vmatrix} \right) (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) =$$

$$= \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3),$$

поскольку выражение, стоящее в больших круглых скобках, является разложением определителя 3-го порядка по последней строке. (См. теорему 1.1.1.)

Замечания: 1°. Из последней формулы и теоремы 2.6.1. следует справедливость теоремы 1.6.3.

2°. В случае ортонормированного правого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$, поэтому в таком базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{Vmatrix}$.

3°. Для введенных в §2.5. векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ справедлива

Теорема 2.7.1. **Тройка векторов $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ образует базис (называемый *взаимным* базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$).**

Доказательство:

Для доказательства достаточно показать, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ линейно независимы. Предположим противное. Пусть существуют, не равные одновременно нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{o}$. Умножив последовательно обе части этого равенства скалярно на $\vec{g}_j$, $j = [1,3]$, получим

$$\lambda_1(\vec{f}_1, \vec{g}_j) + \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{g}_j) + \lambda_3(\vec{f}_3, \vec{g}_j) = 0, \quad j = [1,3]. \qquad (2.7.1.)$$

Для девяти выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$, $i = [1,3]$, $j = [1,3]$ имеем $(\vec{f}_i, \vec{g}_j) = \left[\begin{array}{l} \alpha, i = j \\ 0, i \neq j \end{array}\right.$, где $\alpha \neq 0$.

Действительно, выражения $(\vec{f}_i, \vec{g}_i)$, $i = [1,3]$ суть смешанные произведения некомпланарных векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и потому отличны от нуля. Остальные шесть выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$, $i \neq j$ будут смешанными произведениями векторов, среди которых имеется пара равных, и, следовательно, равными нулю.

Подставляя значения выражений в систему равенств (2.7.1.), получим, что все $\lambda_i = 0$, $i = [1,3]$, что противоречит сделанному предположению о линейной зависимости векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Теорема доказана.

## §2.8. Двойное векторное произведение

Определение 2.8.1. *Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

Для ряда задач оказывается полезным применение формулы

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b}),$$

доказательство которой приводится в приложении 4 (см. §Пр.4.5.).

## §2.9. Замечания об инвариантности произведений векторов

Операции векторных произведений были введены независимо от координатного представления сомножителей и, значит, независимо и от используемого базиса. С другой стороны, естественным представляется вопрос о возможности (и, соответственно, целесообразности) введения операций произведения векторов непосредственно в координатной форме.

В общем случае, каждой упорядоченной паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих в базисе $\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ координатные представления $\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{Vmatrix}$, естественно поставить в соответствие девятку попарных произведений $\xi_k\eta_i$ ; $k,i=1,2,3$ , которую можно записать в виде матрицы

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\eta_3\\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3\\ \xi_3\eta_1 & \xi_3\eta_2 & \xi_3\eta_3\end{Vmatrix} \qquad (2.9.1.)$$

На первый взгляд, зависимость компонент этой матрицы от выбора базиса делает координатный способ введения произведений векторов малоцелесообразным, ибо, в общем случае, придется давать их определение для каждого из возможных базисов. Однако было замечено, что существуют некоторые линейные комбинации чисел $\xi_k\eta_i$ ; $k,i=1,2,3$, инвариантные (то есть не изменяющиеся) при замене базиса, которые можно принять за определение произведений векторов в координатном представлении.

Покажем, в качестве примера, что сумма элементов матрицы 2.9.1., стоящих на ее главной диагонали, не меняется при переходе от одного ортонормированного базиса к другому.

Пусть даны два ортонормированных базиса $\{\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$ и $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ с матрицей перехода $\|S\| = \begin{Vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{Vmatrix}$.

Согласно §1.8., в этом случае для базисных векторов имеют место соотношения $\vec{e}'_t = \sum_{p=1}^{3} \sigma_{pt} \vec{e}_p$ ; $t = 1,2,3$, а для координат соответственно

$$\xi_s = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{si} \xi'_i \; ; \quad s = 1,2,3 \; ; \quad \eta_s = \sum_{t=1}^{3} \sigma_{st} \eta'_t \; ; \quad s = 1,2,3 \; .$$

Пусть $\delta_{it}$ - символ Кронекера (см. §2.3.). Из условия ортонормированности базисов $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ и $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеем

$$(\vec{e}'_i, \vec{e}'_t) = \delta_{it} = (\sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \vec{e}_s, \sum_{p=1}^{3} \sigma_{pt} \vec{e}_p) = \sum_{s=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{pt} (\vec{e}_s, \vec{e}_p) = \sum_{s=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{pt} \delta_{sp} = \sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{st} \; .$$

Отметим, что полученные здесь соотношения $\sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{st} = \delta_{it}; i,t = 1,2,3$ являются свойством матрицы перехода $\| S \|$ от одного ортонормированного базиса к другому.

Найдем теперь выражение для линейной комбинации $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ в базисе $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ , используя зависимости между компонентами матрицы перехода и определение символа Кронекера

$$\sum_{s=1}^{3} \xi_s \eta_s = \sum_{s=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} \sigma_{si} \xi'_i)(\sum_{t=1}^{3} \sigma_{st} \eta'_t) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \xi'_i \eta'_t \sum_{s=1}^{3} \sigma_{si} \sigma_{st} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \xi'_i \eta'_t \delta_{it} = \sum_{t=1}^{3} \xi'_t \eta'_t \; .$$

Полученное равенство доказывает инвариантность суммы $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ при замене одного ортонормированного базиса другим, которая может быть принята в этих базисах за определение скалярного произведения векторов.