Раздел 3
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Как было показано, использование системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства и множеством их радиус-векторов. Это, в свою очередь, позволяет свести исследование свойств линий, поверхностей или тел к изучению множеств радиус-векторов, соответствующих точкам, образующим исследуемые геометрические объекты.

Раздел 3 посвящен методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов - прямой и плоскости - средствами векторной алгебры. В разделах 3, 4 и 5 настоящего пособия будут использоваться обозначения координаты по оси *абсцисс* через x, координаты по оси *ординат* через y и координаты по оси *аппликат* через z, равно как и стандартные формы записи уравнений.

§3.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, проходящая через точку $\vec{r}_0$ с лежащим на ней *ненулевым* вектором $\vec{a}$.

Определение 3.1.1. Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L.

Теорема 3.1.1. **Множество радиус-векторов точек на прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, где τ - произвольный вещественный параметр.**

Доказательство:

Пусть $\vec{r}$ некоторая точка на прямой, тогда вектор $\vec{a}$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{r}-\vec{r}_0$ (Рис. 3.1.1),
и, в силу теоремы 1.4.2.,

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\tau\,\vec{a}.$$

Откуда получаем пара- метрическое представление прямой

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\,\vec{a},\quad \forall\tau\in(-\infty,+\infty).$$

Теорема доказана.

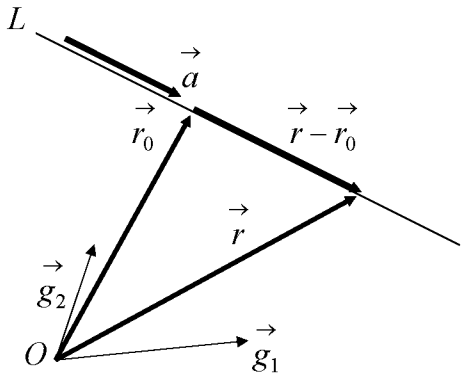

Рисунок 3.1.1.

Найдем теперь координатное представление множества радиус-векторов всех точек прямой L. Пусть $\left\|\vec{r}\right\|_g=\left\|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\|$, $\left\|\vec{r}_0\right\|_g=\left\|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{a}\right\|_g=\left\|\begin{matrix}a_x\\a_y\end{matrix}\right\|$, тогда справедливы теоремы

Теорема 3.1.2. **Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида** $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$**.**

Доказательство:

Условие коллинеарности ненулевых векторов $\vec{r}-\vec{r}_0$ и $\vec{a}$ в координатной форме имеет вид

$$\det\left\|\begin{matrix}x-x_0 & y-y_0\\ a_x & a_y\end{matrix}\right\|=0.$$

Откуда $a_y(x-x_0)-a_x(y-y_0)=0$, или же, $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$, где $A=a_y$; $B=-a_x$; $C=-a_yx_0-a_xy_0$, и мы получили, что уравнение прямой есть алгебраическое уравнение первой степени. Заметим, что справедливость неравенства $|A|+|B|>0$ следует из условия $\vec{a}\neq\vec{o}$.

Теорема доказана.

Теорема 3.1.3. **Всякое уравнение вида** $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$**, в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.**

Доказательство:

Пусть дано уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$. Выберем пару чисел x_0 и y_0 таких, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая почленно два эти равенства, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Возьмем точку $\vec{r_0} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ и вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} -B \\ A \end{Vmatrix}$. По теореме 3.1.2. имеем, что прямая, проходящая через точку $\vec{r_0}$ в направлении вектора $\vec{a}$, имеет уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

Замечание: из теорем 3.1.1-3.1.3 следует, что каждое линейное уравнение в декартовой системе координат на плоскости задает некоторую конкретную прямую, но, с другой стороны, конкретная прямая на плоскости может быть задана бесчисленным множеством линейных уравнений.

Теорема 3.1.4. **Для того чтобы уравнения** $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| > 0$ **и** $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| > 0$ **были уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовало число** $\lambda \neq 0$ **такое, что** $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$ **.**

Доказательство достаточности:

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны и имеет место $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда $A_2x + B_2y + C_2 = \frac{1}{\lambda}A_1x + \frac{1}{\lambda}B_1y + \frac{1}{\lambda}C_1 = \frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1) = 0$, но поскольку $\lambda \neq 0$, то $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Аналогично из $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ следует $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Доказательство необходимости:

Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ есть уравнения одной и той же прямой в некоторой декартовой системе координат. Тогда их направляющие векторы коллинеарны и существует (по теореме 3.1.2.) $\lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$.

С другой стороны, из равносильности уравнений $\lambda A_2x + \lambda B_2y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ следует, что $C_1 = \lambda C_2$ и, окончательно, $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в полярной системе координат (см. §4.6.) оно может иметь вид $\rho = P\sec(\varphi + \varphi_0)$.

§3.2. Формы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. *Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки* $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$ *и* $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix}$

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{Vmatrix}$, то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или $\vec{r} = (1-\tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2$.

Соответственно в координатах, исключив параметр τ, получим одну из следующих формул:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$

$$y = y_1; \quad \forall x, \quad \text{если} \quad y_2 = y_1$$

$$x = x_1; \quad \forall y, \quad \text{если} \quad x_2 = x_1 \quad .$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны условием

$$\det \begin{Vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

Следствие 3.2.1.

Для того, чтобы три точки $\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix}$ и $\vec{r}_3 = \begin{Vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Vmatrix}$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли уравнению

$$\det \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

2°. *Векторное уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через данную точку* $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, *перпендикулярно заданному ненулевому вектору* $\vec{n} = \begin{Vmatrix} n_x \\ n_y \end{Vmatrix}$).

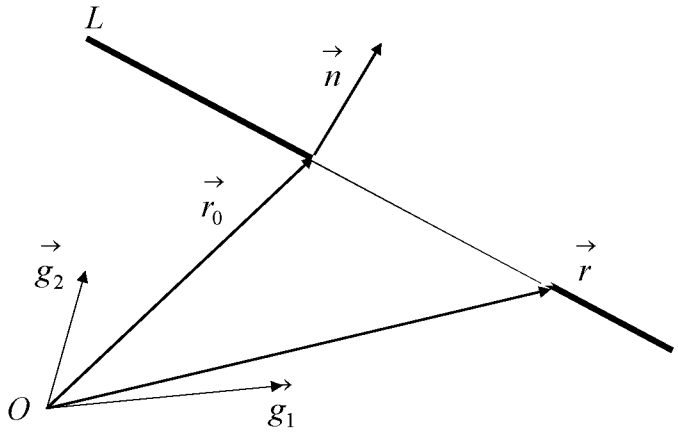

Рисунок 3.2.1.

Возьмем в качестве направляющего вектора данной прямой $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{Vmatrix}$, где вектор $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$ есть радиус-вектор некоторой точки на прямой (Рис. 3.2.1.). Тогда из условия ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ получим $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, или же $(\vec{n}, \vec{r}) = d$, где $d = (\vec{n}, \vec{r}_0)$. При обратном переходе от записи уравнения прямой в виде $(\vec{n}, \vec{r}) = d$ к $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, в качестве $\vec{r}_0$ можно взять, например, $\vec{r}_0 = \dfrac{d}{(\vec{n}, \vec{n})}\vec{n}$.

В *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ векторное уравнение прямой приобретает вид $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$ или же $n_x x + n_y y = d$, где $d = n_x x_0 + n_y y_0$.

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, приходим к заключению, что в *ортонормированной* системе координат вектор $\vec{n}$, для которого $\left\| \vec{n} \right\|_g = \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$, будет ортогонален этой прямой.

Определение 3.2.1.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой L.

3°. *Нормальное уравнение прямой*

Рассмотрим скалярное уравнение прямой в *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$ и преобразуем его, разделив обе части на $\sqrt{A^2 + B^2}$. Подставляя обозначения

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + \rho = 0.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ ясен из следующего рис. 3.2.2.

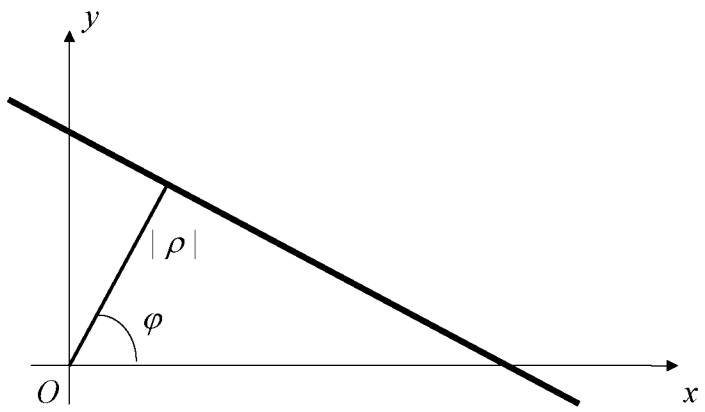

Рисунок 3.2.2.

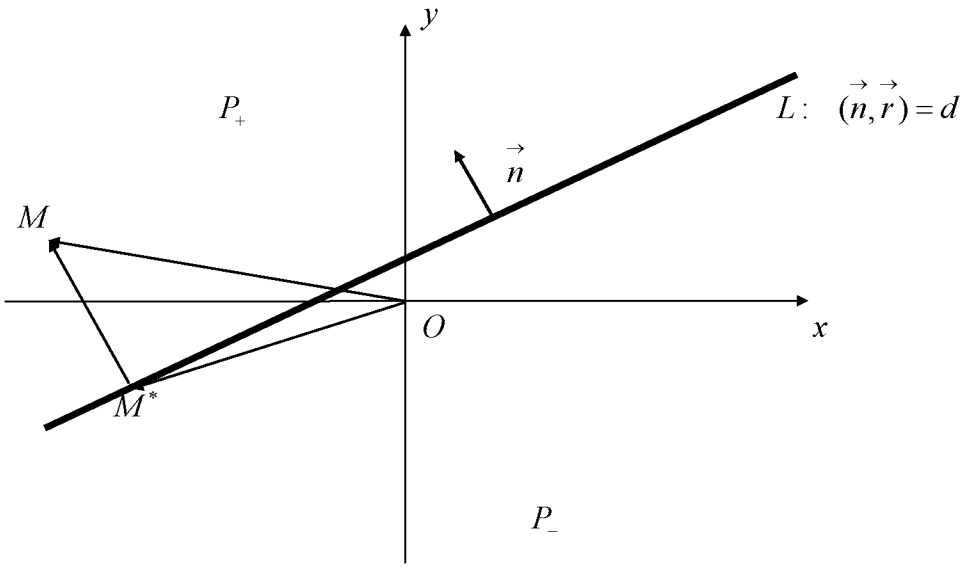

Рисунок 3.2.3.

Замечание о линейных неравенствах

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство $Ax+By+C>0$, $|A|+|B|>0$ определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой $Ax+By+C=0$, $|A|+|B|>0$. Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая L: $(\vec{n},\vec{r})=d$ делит плоскость P на две части, обозначаемые P_+ и P_- (См. рис. 3.2.3.)

Определение 3.2.2. Будем говорить, что точка M с радиус-вектором $\vec{R}$ принадлежит P_+ (или, соответственно, P_-), если существует $\lambda>0$ (соответственно, $\lambda<0$) такое, что $\overrightarrow{M^*M}=\lambda\vec{n}$, где M^* есть ортогональная проекция M на прямую L.

Тогда справедлива

Теорема 3.2.1. **Для того, чтобы $M\in P_+$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $(\vec{n},\vec{R})>d$.**

Доказательство необходимости:

Пусть $M\in P_+$, то есть существует $\lambda>0$ такое, что $\overrightarrow{M^*M}=\lambda\vec{n}$. Оценим величину $(\vec{n},\vec{R})$. Поскольку $M^*\in L$, то $(\vec{n},\overrightarrow{OM^*})=d$, и тогда

$$(\vec{n},\vec{R})=(\vec{n},\overrightarrow{OM^*}+\overrightarrow{M^*M})=(\vec{n},\overrightarrow{OM^*})+(\vec{n},\overrightarrow{M^*M})=d+\lambda(\vec{n},\vec{n})>d$$

в силу положительности λ.

Доказательство достаточности:

Пусть $(\vec{n},\vec{R})>d$ и $\overrightarrow{M^*M}=\lambda\vec{n}$, тогда, в силу $(\vec{n},\overrightarrow{OM^*})=d$, получаем

$$(\vec{n},\vec{R})=(\vec{n},\overrightarrow{OM^*}+\overrightarrow{M^*M})=(\vec{n},\overrightarrow{OM^*})+(\vec{n},\overrightarrow{M^*M})=d+\lambda(\vec{n},\vec{n})>d.$$

Откуда, в силу $\vec{n}\neq\vec{o}$ следует, что $\lambda>0$ и, значит, $M\in P_+$

Теорема доказана.

Задача 3.2.1. *Дана система координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L, с уравнением $(\vec{n},\vec{r}-\vec{r}_0)=0$. Найти расстояние до этой прямой от точки, радиус-вектор которой $\vec{r}_1=\begin{Vmatrix}x_1\\y_1\end{Vmatrix}$.*

Решение

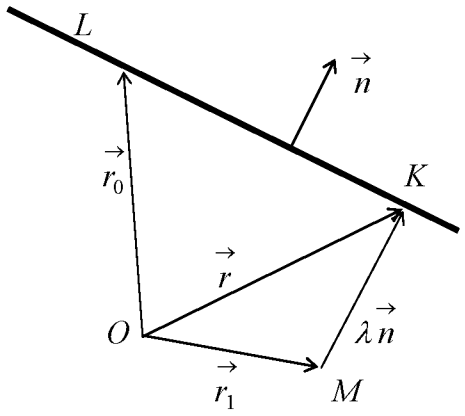

Рисунок 3.2.4.

1°. Пусть $\vec{MK} = \lambda\vec{n}$, тогда $\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda\vec{n}$. (Рис. 3.2.4.)

2°. Точка K принадлежит данной прямой, поэтому имеет место соотношение

$$(\vec{n}, \vec{r_1} + \lambda\vec{n} - \vec{r_0}) = 0.$$

Откуда $$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r_1} - \vec{r_0})}{|\vec{n}|^2}.$$

3°. Подставляя λ в выражение для $\vec{MK}$, получим

$$|\vec{MK}| = |(\vec{r_1} - \vec{r_0}, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|})|.$$

4°. Пусть система координат ортонормированная. Для уравнения $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, как было показано, вектор $\vec{n} = \begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$ перпендикулярен прямой. Поэтому $|\vec{MK}| = \dfrac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Принимая во внимание, что точка $\vec{r_0}$ лежит на прямой L и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, можно записать окончательный ответ в виде $|\vec{MK}| = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Определение 3.2.3. *Пучком прямых* на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую данную точку, именуемую *вершиной пучка.*

Теорема 3.2.2. **Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда**

1°. Для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β таких, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение данной прямой.

2°. При любых, не равных нулю одновременно α и β, уравнение $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$ есть уравнение некоторой прямой данного пучка.

Доказательство:

1°. Возьмем некоторую точку $\vec{r}^{\,*}=\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$, не совпадающую с вершиной пучка, и примем в качестве $\alpha = A_2x^* + B_2y^* + C_2$, а в качестве $\beta = -(A_1x^* + B_1y^* + C_1)$.

Заметим, что $|\alpha|+|\beta|>0$, поскольку точка $\vec{r}^{\,*}$ не принадлежит данным прямым одновременно. Кроме того, прямая

$$(A_2x^* + B_2y^* + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) - (A_1x^* + B_1y^* + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

проходит как через точку $\vec{r}^{\,*}$, так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2°. Пусть $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

При этом уравнение $(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0$ является уравнением прямой, поскольку из $|A_1|+|B_1|>0$, $|A_2|+|B_2|>0$ и $|\alpha|+|\beta|>0$ следует, что

$$|\alpha A_1+\beta A_2|+|\alpha B_1+\beta B_2|>0.$$

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0 \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0 \end{cases}. \qquad (3.2.1.)$$

Прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ по построению имеют по крайней мере одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 3.1.4. они совпадают тогда и только тогда, когда существует $\lambda \neq 0$, для которого $A_1=\lambda A_2$ и $B_1=\lambda B_2$.

А последние два равенства по теореме 1.6.2. равносильны условию $\det\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{Vmatrix} = 0$.

В рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому $\det\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{Vmatrix} \neq 0$ и, в силу теоремы 1.1.2., система линейных уравнений 3.2.1. может иметь лишь единственное решение. С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение $\alpha = \beta = 0$, что в совокупности противоречит неравенству $|\alpha| + |\beta| > 0$. Следовательно, $|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0$.

Теорема доказана.

Определение 3.2.4. Уравнение $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ с неравными одновременно нулю параметрами α и β называется уравнением *пучка прямых* на плоскости.

§3.3. Плоскость в пространстве

Пусть даны система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ в пространстве и плоскость S, проходящая через точку $\vec{r}_0$ с лежащими на S неколлинеарными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

Определение 3.3.1. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ называются *направляющими векторами* плоскости S.

Теорема 3.3.1. **Множество радиус-векторов точек на плоскости S представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi\vec{p} + \theta\vec{q}$, где φ и θ - произвольные вещественные параметры.**

Доказательство:

Пусть $\vec{r}$ некоторая точка на плоскости, тогда векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ будут компланарны. (Рис. 3.3.1.)

Откуда, в силу теоремы 1.4.3. и леммы 1.4.1., получаем

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$$

и, следовательно, уравнение плоскости будет иметь вид

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}\ ,$$

где $\varphi\in(-\infty,+\infty)$; $\theta\in(-\infty,+\infty)$.

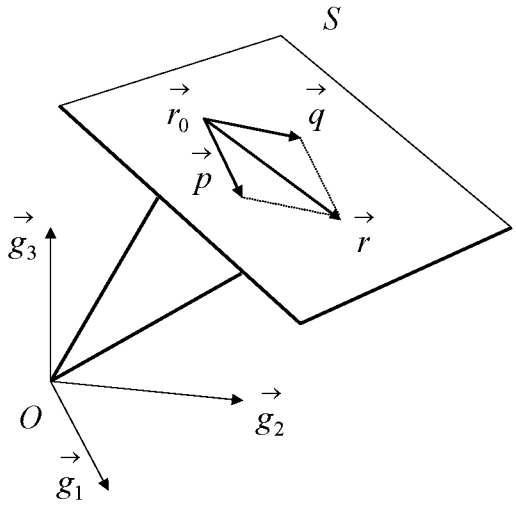

Рисунок 3.3.1.

Теорема доказана.

Получим теперь координатное представление множества радиус-векторов всех точек плоскости S. Пусть $\left\|\vec{r}\right\|_g=\begin{Vmatrix}x\\y\\z\end{Vmatrix}$, $\left\|\vec{r}_0\right\|_g=\begin{Vmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{Vmatrix}$, $\left\|\vec{p}\right\|_g=\begin{Vmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{Vmatrix}$ и $\left\|\vec{q}\right\|_g=\begin{Vmatrix}q_x\\q_y\\q_z\end{Vmatrix}$, тогда будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3.2.

Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида

$$Ax+By+Cz+D=0\,,\quad |A|+|B|+|C|>0\,.$$

Доказательство:

Условие компланарности векторов $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в координатной форме имеет, в силу теоремы 1.6.3., вид

$$\det\begin{Vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ p_x & p_y & p_z\\ q_x & q_y & q_z\end{Vmatrix}=0\,.$$

Откуда $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, или, окончательно, $Ax+By+Cz+D=0$, где числа A , B и C находятся по теореме 1.1.1. и равны соответственно

$$A=\det\begin{Vmatrix}p_y & p_z\\ q_y & q_z\end{Vmatrix}\ ;\quad B=-\det\begin{Vmatrix}p_x & p_z\\ q_x & q_z\end{Vmatrix}\ ;\quad C=\det\begin{Vmatrix}p_x & p_y\\ q_x & q_y\end{Vmatrix}\ ,$$

а $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, и таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени.

Условие невозможности одновременного равенства нулю чисел A, B и C вытекает из неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и следствия 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3. **Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости**.

Доказательство:

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в случае $C \neq 0$ может быть записано в виде

$$\det \begin{Vmatrix} x + \dfrac{DA}{A^2 + B^2 + C^2} & y + \dfrac{DB}{A^2 + B^2 + C^2} & z + \dfrac{DC}{A^2 + B^2 + C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{Vmatrix} = 0,$$

а в случае $C = 0$ в виде

$$\det \begin{Vmatrix} x + \dfrac{DA}{A^2 + B^2} & y + \dfrac{DB}{A^2 + B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

В обоих случаях эти уравнения определяют плоскость, проходящую через некоторую заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

Задача 3.3.1.

В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, попарно несовпадающие и не лежащие на одной прямой точки*

$$\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Vmatrix}; \quad \vec{r}_3 = \begin{Vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{Vmatrix}.$$

Решение:

Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиус-вектора $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ любой принадлежащей этой плоскости точки вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ также будет ей параллелен.

Из условия компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$, получаем искомое уравнение плоскости, имеющее вид $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$, или, в координатной форме (согласно §2.7.)

$$\det \begin{Vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{Vmatrix} = 0.$$

Задача 3.3.2.

В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ *составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку* $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$ *перпендикулярно ненулевому вектору* $\vec{n} = \begin{Vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Vmatrix}$.

Решение:

Из условия задачи следует, что для радиус-вектора $\vec{r}$ любой точки, принадлежащей этой плоскости, векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{n}$ будут ортогональны, т.е. $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

В *ортонормированной* системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ это условие принимает вид

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$$

или, обозначая $A=n_x$; $B=n_y$; $C=n_z$; $D=-n_xx_0-n_yy_0-n_zz_0$, получим $Ax+By+Cz+D=0$.

Следствие 3.3.1.

Если плоскость задана в *ортонормированной* системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, где $|A|+|B|+|C|>0$, то вектор $\vec{n}=\begin{Vmatrix} A \\ B \\ C \end{Vmatrix}$ ортогонален этой плоскости.

Определение 3.3.2.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n})=0$.

Определение 3.3.3.

Вектор $\begin{Vmatrix} A \\ B \\ C \end{Vmatrix}$ называется *главным вектором* плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, $|A|+|B|+|C|>0$.

В ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором.

Задача 3.3.3.

В ортонормированной системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ найти расстояние от точки M с радиус-вектором $\vec{r}^*=\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Vmatrix}$ до плоскости $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{n})=0$.

Решение:

1°. Пусть K есть ортогональная проекция точки M на данную плоскость, тогда $\vec{MK}=\lambda\vec{n}$ и $\vec{r}=\vec{r}^*+\lambda\vec{n}$. (См. рис. 3.3.2.)

2°. Точка K принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n},\vec{r}^*+\lambda\vec{n}-\vec{r}_0)=0$,

и, следовательно,

$$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r}^{\,*} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2},$$

тогда для искомого расстояния получим

$$|\vec{MK}| = |(\vec{r}^{\,*} - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|})|.$$

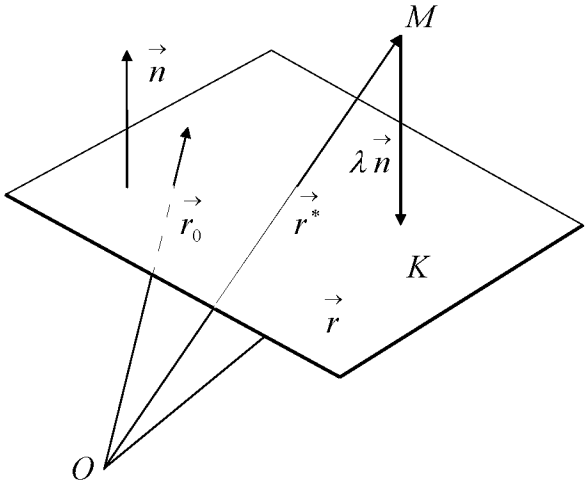

Рисунок 3.3.2.

3°. Рассмотрим теперь *ортонормированную* систему координат. В этом случае вектор $\vec{n} = \begin{Vmatrix} A \\ B \\ C \end{Vmatrix}$ будет нормальным вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Поэтому $|\vec{MK}| = \dfrac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, но, принимая во внимание, что точка $\vec{r}_0$ принадлежит данной плоскости, то есть $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и что $|A| + |B| + |C| > 0$, ответ задачи можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема 3.3.4. **Плоскости** $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$ **и** $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$ **параллельны тогда и только тогда, когда их главные векторы коллинеарны.**

Доказательство:

Докажем достаточность. Если главные векторы коллинеарны, то существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$ и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть переписана в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + \lambda D_2 = 0 \end{cases}.$$

При $D_1 \neq \lambda D_2$ на этих плоскостях нет общих точек, а при $D_1 = \lambda D_2$ - все точки общие, что и означает параллельность плоскостей.

Докажем необходимость.

Пусть плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны. Тогда они должны пересекать одни и те же координатные плоскости по параллельным прямым.

Пусть для определенности этими координатными плоскостями являются плоскости, для которых $x = 0$ и $z = 0$. Линии пересечения, соответствующие первой из координатных плоскостей, будут определяться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0 \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 0 \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Параллельность этих прямых означает существование $\lambda \neq 0$ такого, что $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Рассматривая случай $z = 0$, получаем аналогичную систему соотношений

$$\begin{cases} z = 0 \\ A_1x + B_1y + D_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases},$$

но из условия $B_1 = \lambda B_2$ и параллельности этой пары прямых вытекает, что $A_1 = \lambda A_2$.

Теорема доказана.

Следствие 3.3.2.

Для того чтобы уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \quad \textbf{и}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$$

были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \neq 0$ такое, что

$$A_1 = \lambda A_2; \quad B_1 = \lambda B_2; \quad C_1 = \lambda C_2; \quad D_1 = \lambda D_2 \ .$$

Определение 3.3.4. *Пучком плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 3.3.5. *Уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

называется уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Определение 3.3.6. *Связкой плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Определение 3.3.7. Если точка P, принадлежащая одновременно трем плоскостям

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0 \quad \text{и} \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \quad |A_3| + |B_3| + |C_3| > 0, \end{aligned}$$

единственная, то уравнение вида

$$\begin{aligned} &\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ &+ \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0 \quad . \end{aligned}$$

называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку P.

Для пучка и связки плоскостей в пространстве справедливы теоремы, аналогичные теореме 3.2.1. для пучка прямых на плоскости.

§3.4. Формы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в некоторой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

1°. *Уравнение прямой в параметрической форме*

Пусть точка с радиус-вектором $\vec{r} = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$ и проходящей через точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\,\vec{a}$

2°. *Уравнение прямой в канонической форме*

Если исключить параметр τ из скалярной записи уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\,\vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases},$$

то получается так называемое *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о системе уравнений, задающих прямую в пространстве. Случай $a_x a_y a_z = 0$ рассматривается аналогично §3.2.(1°).

3°. *Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки*

$\vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}$ *и* $\vec{r}_2 = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Vmatrix}$

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{Vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Vmatrix}$, то уравнение прямой в векторной форме можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \text{ или } \vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\,\vec{r}_2 .$$

Соответственно, в координатах после исключения параметра τ получаем соотношения:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

если только $(x_2-x_1)(y_2-y_1)(z_2-z_1)\neq 0$.

4°. *Уравнение прямой в 1-й векторной форме*

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1 \quad \text{и} \quad (\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\ ,$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - неколлинеарные, нормальные векторы этих плоскостей, а d_1 и d_2 - некоторые числа.

Или же, если известна точка $\vec{r}_0$, через которую проходит данная прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r}-\vec{r}_0)=0\\(\vec{n}_2,\vec{r}-\vec{r}_0)=0\end{cases}.$$

Или, в координатной форме, $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.

5°. *Уравнение прямой во 2-й векторной форме*

Прямая в пространстве может быть задана при помощи иного условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r}-\vec{r}_0$, то есть в виде уравнения

$$[\vec{a},\vec{r}-\vec{r}_0]=\vec{o}$$

или же

$$[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}\ ,\ \text{где}\ \vec{b}=[\vec{a},\vec{r}_0].$$

В ортонормированной системе координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ данное уравнение прямой в пространстве принимает вид:

$$\det\begin{Vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{Vmatrix}=\vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{cases}a_yz-a_zy=b_x\\a_zx-a_xz=b_y\\a_xy-a_yx=b_z\end{cases}.$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимые, то есть любое из уравнений является следствием двух других. Действительно, умножив первое уравнение на a_x, второе на a_y и третье на a_z и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида $0=0$, приняв при этом во внимание, что

числа a_x, a_y и a_z не равны нулю одновременно, и что, кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{cases} b_x = a_y z_0 - a_z y_0 \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0 \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0 \end{cases}.$$

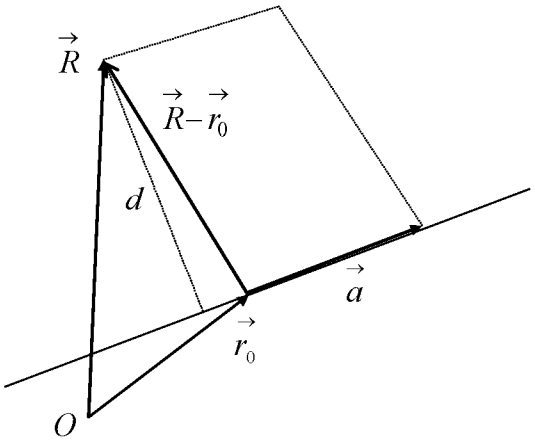

Рисунок 3.4.1.

Наконец, расстояние d от некоторой точки с радиус-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ в пространстве можно найти, воспользовавшись тем фактом, что S - площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна модулю их векторного произведения. Из рисунка 3.4.1. получаем

$$d = \frac{S}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|[\vec{R}-\vec{r}_0, \vec{a}]\right|}{\left|\vec{a}\right|}.$$

§3.5. Решение геометрических задач методами векторной алгебры

Эффективность использования методов векторной алгебры при решении геометрических задач во многом зависит от правильного выбора представления геометрических условий в векторной форме. Например, если ввести равносильные, используемым в элементарной геометрии,

Определение 3.5.1. Углом между плоскостями $(\vec{r}-\vec{r}_{01}, \vec{n}_1) = 0$ и $(\vec{r}-\vec{r}_{02}, \vec{n}_2) = 0$ называется угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

Определение 3.5.2. Углом между плоскостью $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ и прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$ называется угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α - угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{a}$.

то вычисление углов, определяющих взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, может быть сведено к нахождению скалярных произведений соответствующих нормальных и направляющих векторов. В таблицах 3.5.1.-3.5.3. приведены некоторые из часто употребляемых форм выражения геометрических условий при помощи векторных операций.

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Коллинеарность прямых $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\tau\vec{a}_2$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2$ 2°. $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=\vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\tau\vec{a}_2$	$(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=0$
Коллинеарность прямых $\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\vec{a}$ и $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\end{cases}$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$. 2°. $[\vec{a},[\vec{n}_1,\vec{n}_2]]=\vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\vec{a}$ и $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\end{cases}$	$(\vec{a},\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0$
Совпадение прямых $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\tau\vec{a}_2$	1°. Существуют $\lambda\neq 0$ и $\mu\neq 0$ такие, что $\vec{a}_1=\lambda\vec{a}_2$ и $\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02}=\mu\vec{a}_1$ 2°. $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=\vec{o}$ и $[\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{a}_1]=\vec{o}$
Пересечение прямых $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\tau\vec{a}_2$	$[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\neq\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{a}_1,\vec{a}_2)=0$
Условие скрещивания прямых $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\tau\vec{a}_2$	$[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\neq\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{a}_1,\vec{a}_2)\neq 0$.

Таблица 3.5.1. Относительная ориентация прямых в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1,\vec{q}_1]=\lambda[\vec{p}_2,\vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)\neq 0$. 2°. $[[\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2]]=\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)\neq 0$.
Совпадение плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1,\vec{q}_1]=\lambda[\vec{p}_2,\vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)=0$. 2°. $[[\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2]]=\vec{o}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p}_1,\vec{q}_1)=0$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\varphi\vec{p}_1+\theta\vec{q}_1$ и $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}_2+\theta\vec{q}_2$	$([\vec{p}_1,\vec{q}_1],[\vec{p}_2,\vec{q}_2])=0$.
Параллельность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{p},\vec{q},\vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)\neq d$.
Совпадение плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{p},\vec{q},\vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)=d$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r}=\vec{r}_0+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$ и $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $[\vec{p},\vec{q}]=\lambda\vec{n}$. 2°. $[[\vec{p},\vec{q}],\vec{n}]=\vec{o}$.

Таблица 3.5.2. Относительная ориентация плоскостей в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют λ; μ; $\lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})\neq 0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\vec{p},\vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})\neq 0\end{cases}$.
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существуют λ; μ; $\lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{a}=\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ и $(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})=0$. 2°. $\begin{cases}(\vec{a},\vec{p},\vec{q})=0\\(\vec{r}_{01}-\vec{r}_{02},\vec{p},\vec{q})=0\end{cases}$.
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $\vec{r}=\vec{r}_{02}+\varphi\vec{p}+\theta\vec{q}$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda[\vec{p},\vec{q}]$. 2°. $[\vec{a},[\vec{p},\vec{q}]]=\vec{o}$.
Параллельность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$(\vec{a},\vec{n})=0$, при условии $(\vec{n},\vec{r}_0)\neq d$.
Принадлежность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	$\begin{cases}(\vec{a},\vec{n})=0\\(\vec{r}_0,\vec{n})=d\end{cases}$.
Ортогональность прямой $\vec{r}=\vec{r}_{01}+\tau\vec{a}$ к плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существует $\lambda\neq 0$ такое, что $\vec{a}=\lambda\vec{n}$. 2°. $[\vec{a},\vec{n}]=\vec{o}$.

Ортогональность прямой $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\end{cases}$ и плоскости $(\vec{n},\vec{r})=d$	1°. Существуют λ; μ; $\lvert\lambda\rvert+\lvert\mu\rvert>0$ такие, что $\vec{n}=\lambda\vec{n}_1+\mu\vec{n}_2$. 2°. $[\vec{n},[\vec{n}_1,\vec{n}_2]]=\vec{o}$.

Таблица 3.5.3. Относительная ориентация прямой и плоскости в пространстве

Отметим, что в таблицах 3.5.1.-3.5.3. сохранены введенные ранее обозначения и ограничения.

При решении геометрических задач методами векторной алгебры также важно уметь переводить эти представления из одной эквивалентной формы в другую [1]).

Найдем, например, для прямой, заданной в пространстве пересечением двух непараллельных плоскостей $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r})=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r})=d_2\end{cases}$, уравнение в параметрическом виде $\vec{r}=\vec{r}_0+\tau\vec{a}$.

Нетрудно убедиться, что в качестве направляющего вектора данной прямой можно взять $\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$, а радиус-вектор точки $\vec{r}_0$ может быть найден как некоторая линейная комбинация векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Действительно, пусть $\vec{r}_0=\xi\vec{n}_1+\eta\vec{n}_2$, тогда из системы линейных уравнений $\begin{cases}(\vec{n}_1,\vec{r}_0)=d_1\\(\vec{n}_2,\vec{r}_0)=d_2\end{cases}$, находим $\xi=\dfrac{\Delta_\xi}{\Delta}$ и $\eta=\dfrac{\Delta_\eta}{\Delta}$, где

$$\Delta=\det\begin{Vmatrix}(\vec{n}_1,\vec{n}_1) & (\vec{n}_1,\vec{n}_2)\\(\vec{n}_2,\vec{n}_1) & (\vec{n}_2,\vec{n}_2)\end{Vmatrix},\ \Delta_\xi=\det\begin{Vmatrix}d_1 & (\vec{n}_1,\vec{n}_2)\\d_2 & (\vec{n}_2,\vec{n}_2)\end{Vmatrix}\ \text{и}\ \Delta_\eta=\det\begin{Vmatrix}(\vec{n}_1,\vec{n}_1) & d_1\\(\vec{n}_2,\vec{n}_1) & d_2\end{Vmatrix}$$

(см. теорему 1.1.2.) Покажите самостоятельно, что из условия неколлинеарности нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ следует $\Delta\neq 0$.

---

[1]) Следует иметь в виду, что использование различных векторных представлений одного и то же геометрического условия может приводить к различным, но, естественно, эквивалентным формам записи решения. (См., например, задачу 3.5.2.)

Аналогично может быть выполнен и обратный переход.

Пусть уравнение прямой в пространстве имеет вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$, причем предположим, что $\vec{r}_0$ и $\vec{a}$ неколлинеарны. Тогда в качестве нормальных векторов плоскостей, которые пересекаются по данной прямой, можно взять $\vec{n}_1 = [\vec{a}, \vec{r}_0]$ и $\vec{n}_2 = [\vec{a}, \vec{n}_1]$. Из второго равенства, используя формулу для двойного векторного произведения (см. §2.8.), получаем

$$\vec{n}_2 = [\vec{a}, \vec{n}_1] = [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{r}_0]] = (\vec{a}, \vec{r}_0)\vec{a} - (\vec{a}, \vec{a})\vec{r}_0 = (\vec{a}, \vec{r}_0)\vec{a} - \left|\vec{a}\right|^2 \vec{r}_0 \ .$$

В качестве d_1 и d_2 очевидно можно принять $d_1 = (\vec{n}_1, \vec{r}_0)$ и $d_2 = (\vec{n}_2, \vec{r}_0)$.

Случай коллинеарных векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{a}$ рассмотрите самостоятельно.

В заключение рассмотрим в качестве примеров решение некоторых стереометрических задач методами векторной алгебры.

Задача 3.5.1. *Даны плоскость $(\vec{n}, \vec{r}) = d_0$ и пересекающая ее прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$. Найти радиус-вектор точки пересечения этой прямой и плоскости.*

Решение:

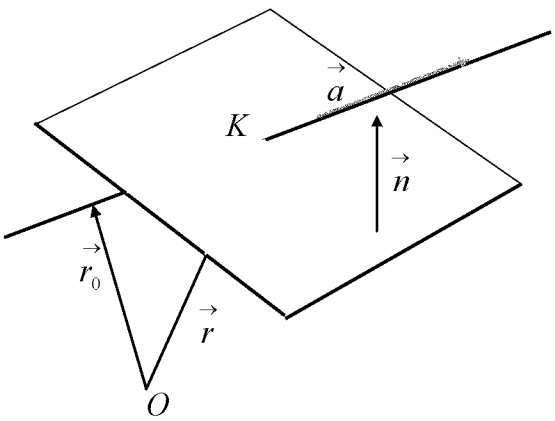

Рисунок 3.5.2.

1°. Заметим, что, если $(\vec{n}, \vec{a}) = 0$, то либо решений нет, либо вся прямая лежит на данной плоскости. Поэтому будем далее полагать, что $(\vec{n}, \vec{a}) \neq 0$.

2°. Имеем $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{n}$, где $\vec{r}$ - искомый радиус-вектор точки K, то есть точки пересечения прямой и плоскости, а λ - соответствующее этой точке значение параметра τ. (Рис. 3.5.2.)

Поскольку K принадлежит данной плоскости, то имеет место соотношение

$$(\vec{n}, \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}) = d_0 .$$

Откуда $\lambda = \dfrac{d-(\vec{n},\vec{r}_0)}{(\vec{n},\vec{a})}$ и окончательно $\vec{r} = \vec{r}_0 + \dfrac{d-(\vec{n},\vec{r}_0)}{(\vec{n},\vec{a})}\vec{a}$.

Задача 3.5.2.

Даны точка с радиус-вектором $\vec{R}$ и прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau\vec{a}$. Найти расстояние от этой точки до данной прямой, не используя операцию векторного произведения.

Решение:

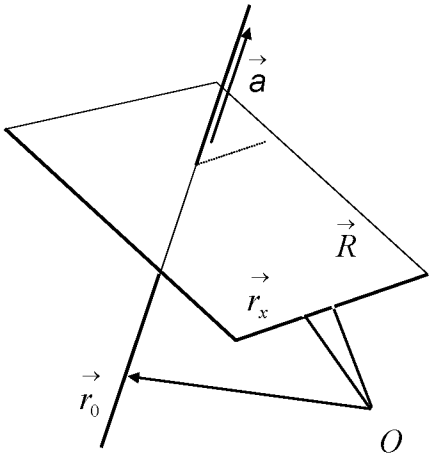

Рисунок 3.5.3.

1°. Проведем через данную точку с радиус-вектором $\vec{R}$ плоскость, перпендикулярную прямой. (Рис. 3.5.3.) Обозначим через $\vec{r}_x$ радиус-вектор точки пересечения прямой и плоскости. Тогда искомое расстояние будет равно $\rho = |\vec{R} - \vec{r}_x|$.

2°. Точка $\vec{r}_x$ будет удовлетворять одновременно соотношениям $(\vec{a}, \vec{R} - \vec{r}_x) = 0$ и $\vec{r}_x = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$, но тогда, исключая параметр λ,

находим, что $\vec{r}_x = \vec{r}_0 + \dfrac{(\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

и $$\rho = \sqrt{\left(\vec{R}-\vec{r}_0 - \frac{(\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\,,\ \vec{R}-\vec{r}_0 - \frac{(\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right)} = \sqrt{|\vec{R}-\vec{r}_0|^2 - \frac{(\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a})^2}{|\vec{a}|^2}}.$$

Заметим, что в силу легко проверяемого тождества $\left|\vec{p}\right|^2\left|\vec{q}\right|^2 = (\vec{p},\vec{q})^2 + \left|[\vec{p},\vec{q}]\right|^2$ данное решение совпадает с полученным в конце §3.4. значением $\rho = \dfrac{\left|[\vec{R}-\vec{r}_0,\vec{a}]\right|}{|\vec{a}|}$.

Задача 3.5.3.

Найти расстояние между прямыми $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau\vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau\vec{a}_2$.

Решение: 1°. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то решение следует из рис. 3.5.4. и дается формулой $\rho = \dfrac{S}{|\vec{a}_1|} = \dfrac{|[\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1]|}{|\vec{a}_1|}$.

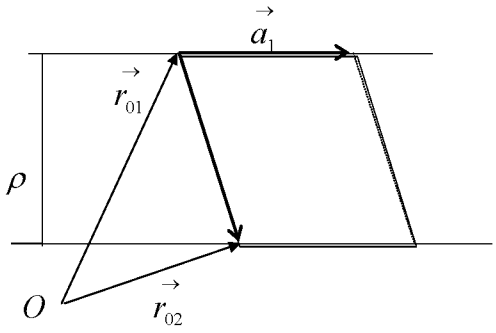

Рисунок 3.5.4.

2°. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны, тогда построим пару плоскостей, параллельных этим векторам, одна из которых содержит точку $\vec{r}_{01}$, а другая точку $\vec{r}_{02}$ (Рис. 3.5.5.)

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{r}_{02}$ - $\vec{r}_{01}$, равен произведению площади параллелограмма, находящегося в основании, на искомую величину ρ.

Откуда находим, что

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

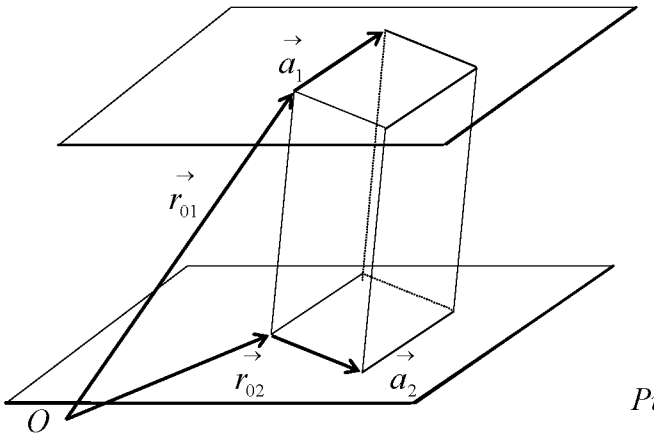

Рисунок 3.5.5.

Задача 3.5.4. *Даны плоскость* $(\vec{n}, \vec{r}) = \delta$ *и прямая* $[\vec{p}, \vec{r}] = \vec{q}$. *Найти* $\vec{R}$ *- радиус-вектор точки их пересечения.*

Решение: Умножив обе части уравнения прямой векторно слева на $\vec{n}$, получим $[\vec{n}, [\vec{p}, \vec{r}]] = [\vec{n}, \vec{q}]$. Подставив в это соотношение искомый вектор $\vec{R}$ и применив формулу §2.8., приходим к равенству

$$\vec{p}\,(\vec{n}, \vec{R}) - \vec{R}\,(\vec{n}, \vec{p}) = [\vec{n}, \vec{q}].$$

Поскольку $\vec{R}$ принадлежит данной плоскости, то $(\vec{n}, \vec{R}) = \delta$, и тогда, при естественном ограничении $(\vec{n}, \vec{p}) \neq 0$, получаем $\vec{R} = \dfrac{\delta\,\vec{p} - [\vec{n}, \vec{q}]}{(\vec{n}, \vec{p})}$.