Раздел 4
НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

§4.1. Линии на плоскости и в пространстве

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и числовое множество Ω, являющееся отрезком или интервалом (возможно, бесконечным или полубесконечным).

Определение 4.1.1. Будем говорить, что линия L на плоскости задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме $\left\| \vec{r} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{matrix} \right\|$, где $F_x(\tau)$, $F_y(\tau)$ - непрерывные, скалярные функции аргумента τ, определенные для $\tau \in \Omega$), если

1°. Для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L.

2°. Для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на L, существует $\tau_0 \in \Omega$ такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения $G(x, y) = 0$, которое получается исключением параметра τ из системы уравнений $\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \end{cases}$, $\tau \in \Omega$.

Пример 4.1.1. 1°. Прямая линия задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где $\vec{a}$ - направляющий вектор, а $\vec{r}_0$ - одна из точек данной прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид:

$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \end{cases}$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$, то есть $\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y \end{cases}$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$

или $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, то есть $G(x, y) = Ax + By + C$.

2°. В декартовой ортонормированной системе координат окружность радиуса R с центром в точке $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ в параметрическом виде может быть задана как:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\tau \\ y = y_0 + R\sin\tau \end{cases}, \quad \tau \in [0, 2\pi), \text{ то есть } \begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R\cos\tau \\ F_y(\tau) = y_0 + R\sin\tau \end{cases}, \quad \tau \in [0, 2\pi)$$

или же уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где

$$G(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2.$$

Определение 4.1.2. Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0$, где p_k и q_k целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Определение 4.1.3. Число $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, указанного в определении 4.1.2., где максимум ищется по всем k, для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший* из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется *порядком алгебраической линии*.

Пример 4.1.2. (алгебраические линии)

Прямая	$x + 3y + 2 = 0$	(N=1)
Квадратная парабола	$y - x^2 = 0$	(N=2)
Гипербола	$xy - 1 = 0$	(N=2)
"Декартов лист"	$x^3 + y^3 - xy = 0$	(N=3).

Теорема 4.1.1. **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство:

Пусть алгебраическая линия L имеет в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ уравнение $G(x, y) = 0$ и порядок N. Перейдем к системе координат $\{O, \vec{g}_1', \vec{g}_2'\}$. Формулы перехода, согласно соотношениям (1.8.2.), имеют вид:

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1 \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2 \end{cases},$$

поэтому уравнение линии L в "новой" системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2) = 0 \ .$$

Отсюда следует, в силу определения 4.1.2., что $N \geq N'$, то есть при переходе к "новой" системе координат порядок алгебраической кривой не может повыситься. Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от $\{O, \vec{g}_1', \vec{g}_2'\}$ к $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, получим $N \leq N'$ и, окончательно, $N = N'$.

Теорема доказана.

Замечание: фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

Пример 4.1.4.

1°. В ортонормированной системе координат набор условий $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ задает прямоугольный равнобедренный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины 3.

2°. Неравенство вида $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ определяет круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве. Пусть дана пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 4.1.4.

Будем говорить, что линия L в пространстве задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{Vmatrix}$, где $F_x(\tau)$, $F_y(\tau)$, $F_z(\tau)$ - непрерывные, скалярные функции от τ,

определенные для $\tau \in \Omega$), если

1°. Для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L.

2°. Для любой точки $\vec{r_0}$, лежащей на L, существует $\tau_0 \in \Omega$ такое, что выполнено равенство $\vec{r_0} = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений $\begin{cases} G(x,y,z)=0 \\ H(x,y,z)=0 \end{cases}$, которая получается исключением параметра τ из соотношений $\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \\ z = F_z(\tau) \end{cases}$, $\tau \in \Omega$, или же равносильным уравнением, например, вида $G^2(x,y,z) + H^2(x,y,z) = 0$.

Пример 4.1.3.

1°. В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка $x^2 + y^2 = 0$, $\forall z$ является прямой.

2°. В ортонормированной системе координат винтовая линия радиуса R с шагом $2\pi a$ может быть задана в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R\cos\tau \\ y = R\sin\tau \\ z = a\tau \end{cases}, \quad \tau \in (-\infty, +\infty), \text{ или же } \begin{cases} x = R\cos\dfrac{z}{a} \\ y = R\sin\dfrac{z}{a} \end{cases}.$$

§4.2. Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и Ω -множество упорядоченных пар чисел φ, θ, заданное условиями: $\alpha \le \varphi \le \beta$, $\gamma \le \theta \le \delta$.

Определение 4.2.1.

Будем говорить, что в пространстве поверхность S задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ (или в координатной форме $\left\| \vec{r} \right\|_g = \begin{Vmatrix} F_x(\varphi,\theta) \\ F_y(\varphi,\theta) \\ F_z(\varphi,\theta) \end{Vmatrix}$, где $F_x(\varphi,\theta)$, $F_y(\varphi,\theta)$, $F_z(\varphi,\theta)$ - непрерывные, скалярные функции двух аргументов φ, θ, определенные для $\varphi, \theta \in \Omega$), если:

1°. Для любой упорядоченной пары чисел $\varphi, \theta \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ лежит на S.

2°. Для любой точки $\vec{r_0}$, лежащей на S, существует упорядоченная пара чисел $\varphi_0, \theta_0 \in \Omega$ таких, что выполнено равенство $\vec{r_0} = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$.

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения $G(x, y, z) = 0$, которое получается исключением φ и θ из системы уравнений $\begin{cases} x = F_x(\varphi, \theta) \\ y = F_y(\varphi, \theta) \\ z = F_z(\varphi, \theta) \end{cases}$; $\varphi, \theta \in \Omega$.

Пример 4.2.1.

В ортонормированной системе координат *сфера* радиуса R с центром в точке $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$ может быть параметрически задана в виде,

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi\sin\theta \\ y = y_0 + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = z_0 + R\cos\theta \end{cases}; \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi \end{matrix},$$

а ее уравнение в координатах $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Определение 4.2.2.

Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0$, где p_k, q_k и r_k целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Определение 4.2.3.

Число $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, (указанного в определении 4.2.2.), где максимум ищется по всем k, для которых $\alpha_k \ne 0$. Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

Пример 4.2.2. (алгебраические поверхности)

Плоскость	$2x+3y+z=0$	(N=1)
Прямой круговой цилиндр	$x^2+y^2-1=0$	(N=2)
Сфера	$x^2+y^2+z^2-R^2=0$	(N=2)

Теорема 4.2.1. **Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство:

Аналогично доказательству теоремы 4.1.1.

Замечание: тела в пространстве можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

§4.3. Цилиндрические и конические поверхности

Пусть в пространстве заданы: система координат $\{O,\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3\}$ и некоторая линия $\vec{r}=\vec{F}(\varphi)$, $\varphi\in\Omega$, которую будем называть *направляющей*.

Определение 4.3.1. Проведем через каждую точку направляющей кривой прямую, называемую *образующей*, параллельно некоторому ненулевому вектору $\vec{a}$.

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *цилиндрической поверхностью*.

Составим уравнение цилиндрической поверхности в общем виде. Во введенных обозначениях $\vec{r}=\vec{F}(\varphi)+\vec{NM}$ (рис. 4.3.1.), но, по определению цилиндрической поверхности, $\vec{NM}=\theta\vec{a}$ и, следовательно, уравнение цилиндрической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\varphi,\theta)=\vec{F}(\varphi)+\theta\vec{a},\ \varphi\in\Omega,\ \theta\in(-\infty,+\infty).$$

Пусть в координатной форме $\left\|\vec{F}(\varphi)\right\|_g = \begin{Vmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{Vmatrix}$ и $\left\|\vec{a}\right\|_g = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$, тогда, после исключения θ, получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{a_x} = \frac{y - F_y(\varphi)}{a_y} = \frac{z - F_z(\varphi)}{a_z}.$$

Пример 4.3.1.

Прямая круговая цилиндрическая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,
- а образующими являются прямые, перпендикулярные этой плоскости,

задается системой условий

$$\begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \\ z = \theta \end{cases}, \text{ поскольку } \vec{F}(\varphi) = \begin{Vmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \vec{a} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что если из полученных соотношений также исключить и параметр φ, то получится уравнение вида $x^2 + y^2 = 9$ для любого z, откуда следует, что порядок данной алгебраической поверхности $N = 2$.

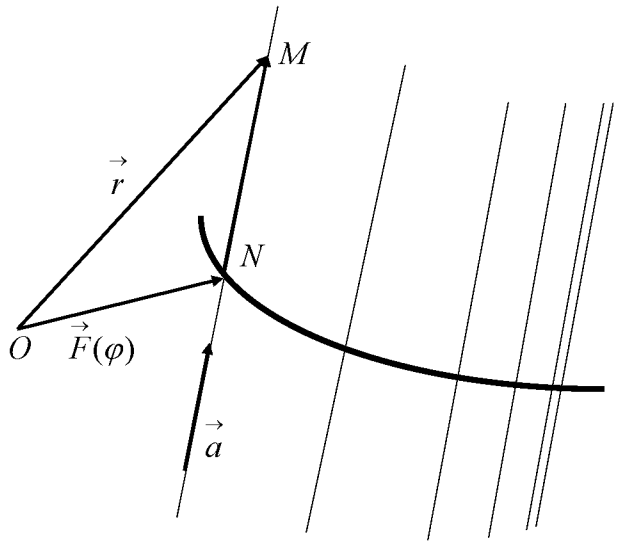

Рисунок 4.3.1.

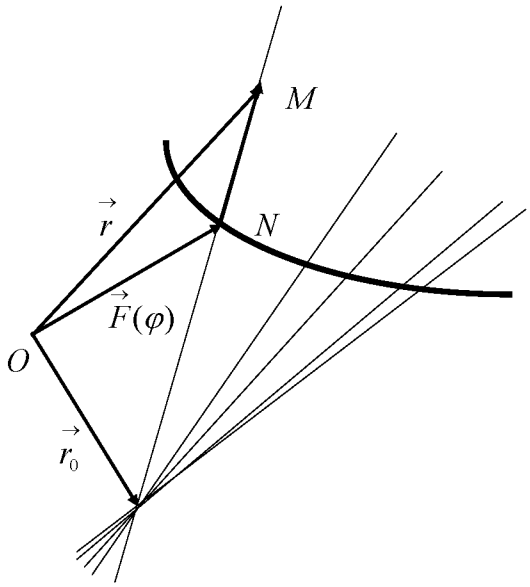

Рисунок 4.3.2.

Определение 4.3.2.

Проведем через каждую точку направляющей линии прямую (называемую *образующей*), проходящую через некоторую фиксированную, не принадлежащую направляющей, точку (называемую *вершиной*) с радиус-вектором $\vec{r}_0$.

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *конической поверхностью*.

Составим уравнение конической поверхности в общем виде.

Аналогично рассмотренному выше случаю, $\vec{r} = \vec{F}(\varphi) + \vec{NM}$, но, по определению конической поверхности, из рис. 4.3.2. $\vec{NM} = \theta(\vec{r}_0 - \vec{F}(\varphi))$ и, следовательно, уравнение конической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (1-\theta)\vec{F}(\varphi) + \theta\vec{r}_0,$$
$$\varphi \in \Omega,\ \theta \in (-\infty,+\infty) \quad .$$

Пусть в координатной форме $\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Vmatrix}$, тогда, после исключения θ, получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{x_0 - F_x(\varphi)} = \frac{y - F_y(\varphi)}{y_0 - F_y(\varphi)} = \frac{z - F_z(\varphi)}{z_0 - F_z(\varphi)}.$$

Пример 4.3.2.

Прямая круговая коническая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиуса 3 , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,
- и образующими, проходящими через точку $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$,

задается системой условий (см. пример 4.3.1.)

$$\frac{x - 3\cos\varphi}{-3\cos\varphi} = \frac{y - 3\sin\varphi}{-3\sin\varphi} = \frac{z}{-1}, \quad \varphi \in [0,2\pi).$$

Заметим, что если из полученных соотношений исключить также и параметр φ, то получится уравнение вида $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - (z+1)^2 = 0$, то есть $N = 2$.

§4.4. Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и некоторая линия L.

Определение 4.4.1. В соответствии с определениями 4.1.2. и 4.1.3. будем говорить, что линия L является *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (4.4.1.)$$

где числа A, B и C не равны нулю одновременно $(|A|+|B|+|C|>0)$, а x и y суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на линии L.

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1. зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти к той системе координат, в которой запись уравнения линии оказывается наиболее простой.

Если ввести обозначение $\Delta = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = AC - B^2$, то будет справедлива

Теорема 4.4.1. **Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат $\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, в которой уравнение этой линии имеет (при $a>0$, $b>0$, $p>0$) один из следующих девяти (называемых *каноническими*) видов [1]):**

	Пустые множества	*Точки*	*Совпадающие прямые*	*Несовпадающие прямые*	*Кривые*
$\Delta>0$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$	$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$			*Эллипс* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$
$\Delta<0$				$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$	*Гипербола* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$
$\Delta=0$	$y'^2=-a^2$, $\forall x'$		$y'^2=0$, $\forall x'$	$y'^2=a^2$, $\forall x'$	*Парабола* $y'^2=2px'$

[1]) Для случая $\Delta>0$ накладывается дополнительное, устраняющее неоднозначность, условие $a \ge b$.

Доказательство:

1°. Предварительно заметим, что, без ограничения общности, можно считать выполненными условия: $B \geq 0$ и $A \geq C$.

Действительно, если $B < 0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении 4.4.1. Если же $A < C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$; $\vec{e}_2' = \vec{e}_1$; $\vec{OO'} = \vec{o}$, мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства $x = y'$; $y = x'$ в силу утверждений §1.8. Заметим также, что

$$\det\begin{Vmatrix} C & B \\ B & A \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = \Delta .$$

2°. Если $B = 0$, то переходим к пункту 4°. Если же $B > 0$, то выбираем новую ортонормированную систему координат $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$, получаемую из исходной поворотом против часовой стрелки вокруг точки O на угол $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ такой, чтобы коэффициент при произведении $x'y'$ оказался равным нулю.

Выведем правило выбора этого угла. Рассмотрим поворот (см. §1.8.)

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_2 \cos\alpha \end{cases} \text{ с } \vec{OO'} = \vec{o},$$

тогда формулы перехода от $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}.$$

Подставляя выражения "старых" координат через "новые", получаем уравнение 4.4.1. в виде

$$A(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ C(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0$$

или же $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$.

Откуда находим, что

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$
$$2B' = -2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B\cos^2\alpha - 2B\sin^2\alpha + 2C\sin\alpha\cos\alpha$$
$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha.$$

Из условия $B' = 0$ следует, что $2B\cos 2\alpha - (A - C)\sin 2\alpha = 0$ и, окончательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}; \quad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A - C}, \text{ при } A > C,$$

или же $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ при $A = C$, то есть искомый угол найден. Заметим, что угол α также может быть найден из равносильного уравнения $\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{A - C}{B}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$.

3°. Заметим, что при такой замене координат величины Δ и $A + C$ не изменится. Действительно, из соотношений $1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 1 + \left(\dfrac{A - C}{2B}\right)^2 = \dfrac{1}{\sin^2 2\alpha}$ и неравенства $0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$ получаем

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}; \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}.$$

Найдем теперь значения A' и C'. Из предыдущих соотношений имеем

$$A' = A\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + B\sin 2\alpha + C\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2}\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha =$$
$$= \frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2}\frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} + B\frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} =$$
$$= \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}.$$

Аналогично получаем, что $C' = \dfrac{A + C}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}$.

Откуда следует, что

$$\Delta' = \det\begin{Vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{Vmatrix} = A'C' = \left(\frac{A + C}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(4B^2 + (A - C)^2) =$$
$$= AC - B^2 = \det\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} = \Delta,$$

то есть величина Δ не меняется при выполняемой замене системы координат. Также очевидно, что при этом и $A' + C' = A + C$.

4°. В дальнейших рассуждениях будем полагать, что $B=0$ и рассмотрим отдельно случаи $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ для уравнения вида $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Пусть $\Delta \neq 0$. Это означает, что $A \neq 0$ и $C \neq 0$ и уравнение линии может быть переписано в виде $A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F$.

Обозначим $P=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F$, тогда, перейдя к новой системе координат

$$\begin{cases} \vec{e}_1'=\vec{e}_1 \\ \vec{e}_2'=\vec{e}_2 \\ \vec{OO'}=-\frac{D}{A}\vec{e}_1-\frac{E}{C}\vec{e}_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x=x'-\frac{D}{A} \\ y=y'-\frac{E}{C} \end{cases},$$

получим $Ax'^2+Cy'^2=P$ и откуда непосредственно следует, что

$$\pm\frac{x'^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{A}\right|}\right)^2}\pm\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{C}\right|}\right)^2}=\pm 1 \quad ; \quad P\neq 0$$

$$\pm\frac{x'^2}{\sqrt{|C|^2}}\pm\frac{y'^2}{\sqrt{|A|^2}}=0 \quad ; \quad P=0$$

и мы приходим, таким образом, к одному из шести следующих уравнений:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0 \quad ; \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1 \quad , \quad \text{ãäå } \Delta>0$$

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0 \quad ; \quad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad ; \quad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=-1 \quad , \quad \text{ãäå } \Delta<0 \quad .$$

Первые пять из этих случаев содержатся в формулировке теоремы, а шестой сводится к пятому умножением обеих частей уравнения на -1 с последующим взаимным переобозначением переменных x' и y'.

5°. Пусть $\Delta=0$. Это означает, что $AC=0$, то есть либо $A=0$, либо $C=0$ (но, не вместе!). Пусть $A=0$ (если это не так, то взаимно переобозначим переменные x' и y'), тогда уравнение линии $Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ может быть записано в виде

$$C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{E^2}{C}-F-2Dx \quad , \quad C\neq 0.$$

При $D=0$ получаем

$$C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{E^2}{C}-F,$$

то есть одно из трех уравнений $y'^2=a^2$; $y'^2=0$; $y'^2=-a^2$.

Если же $D\neq 0$, то уравнение можно привести к виду

$$\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=-\frac{2D}{C}\left(x-\frac{1}{2D}\left(\frac{E^2}{C}-F\right)\right)$$

и, таким образом, либо $y'^2=2px'$, либо $y'^2=-2px'$, где $p>0$. Первый из этих случаев указан в формулировке теоремы, а второй сводится к первому заменой координат:

$$\begin{cases}\vec{e}_1'=-\vec{e}_1\\ \vec{e}_2'=\vec{e}_2\\ \vec{OO'}=\vec{o}\end{cases};\quad \begin{cases}x=-x'\\ y=y'\end{cases}.$$

Теорема доказана.

Замечания: 1°. В теореме 4.1.1. было показано, что порядок алгебраической линии, в том числе и для рассматриваемых в теореме 4.4.1. случаев, не меняется при замене системы координат.

Из доказательства теоремы также следует, что поворот и параллельный перенос ортонормированной системы координат не допускает перемещения уравнения линии второго порядка из одной строки таблицы, приведенной в формулировке теоремы 4.4.1., в другую.

2°. Более того, будет показано (теорема 5.4.9.), что никакой заменой системы координат нельзя переместить линию второго порядка, находящуюся в одной из клеток таблицы в условии теоремы 4.4.1., в другую клетку.

3°. Линии второго порядка, для которых $\Delta>0$ принято относить к *эллиптическому типу*, линии с $\Delta<0$ - к *гиперболическому типу*, а линии с $\Delta=0$ - к *параболическому типу*.

4°. Алгоритм доказательства теоремы 4.4.1. можно использовать как для нахождения канонического вида уравнения линии второго порядка, так и для построения *канонической системы координат*, то есть системы координат, в которой данная линия второго порядка имеет канонический вид.

Исследование конкретных свойств различных типов линий второго порядка приводится в Приложении 1.

§4.5. Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть дана *ортонормированная* система координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ в пространстве.

Определение 4.5.1. В соответствии с определениями 4.2.2. и 4.2.3. будем говорить, что поверхность S является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} &A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \\ &+ 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0 \quad , \end{aligned} \qquad (4.5.1.)$$

где числа A_{11} ; A_{22} ; A_{33} ; A_{12} ; A_{13} ; A_{23} не равны нулю одновременно, а x, y и z суть координаты радиус-вектора точки, лежащей на поверхности S.

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1.) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой запись уравнения поверхности оказывается наиболее простой.

Теорема 4.5.1. **Для каждой поверхности второго порядка существует ортонормированная система координат $\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\}$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих семнадцати канонических видов:**

Пустые множества	*Точки, прямые и плоскости*	*Цилиндры и конусы*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=-1$ $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1;\quad \forall z'$ $x'^2=-a^2;\quad \forall y', z'$	*Изолированная точка* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{b^2}=0$ *Прямая* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad \forall z'$ *Пара пересекающихся плоскостей* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0;\quad \forall z'$ *Пара параллельных или совпадающих плоскостей* $x'^2=a^2 \quad x'^2=0;\quad \forall y', z'$	*Эллиптический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad \forall z'$ *Гиперболический цилиндр* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1;\quad \forall z'$ *Параболический цилиндр* $y'^2=2px';\quad \forall z'$ *Конус* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0$

Невырожденные поверхности		
Эллипсоиды	*Параболоиды*	*Гиперболоиды*
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$	*Эллиптический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=2z'$ *Гиперболический параболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=2z'$	*Однополостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$ *Двуполостный гиперболоид* $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$

причем $a>0,\quad b>0,\quad c>0,\quad p>0$**.**

Доказательство:

Хотя возможно доказать существование ортонормированной системы координат с требуемыми свойствами, применив подход аналогичный использованному при доказательстве теоремы 4.4.1., представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос в рамках теории евклидовых пространств, где утверждение теоремы 4.5.1. непосредственно вытекает из более общего случая, рассмотренного в §12.1 и §12.2.

Исследование свойств конкретных типов поверхностей второго порядка приводится в Приложении 2.

§4.6. Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

Полярная система координат

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается парой упорядоченных чисел $\{\rho, \varphi\}$, где $\rho = \left|\vec{OM}\right|$, $\varphi = \angle(\vec{OM}, \vec{OP})$, удовлетворяющих ограничениям $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Точка O называется *полюсом*, а луч OP - *полярной осью*. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4.6.1.). Для полюса этот угол не определяется.

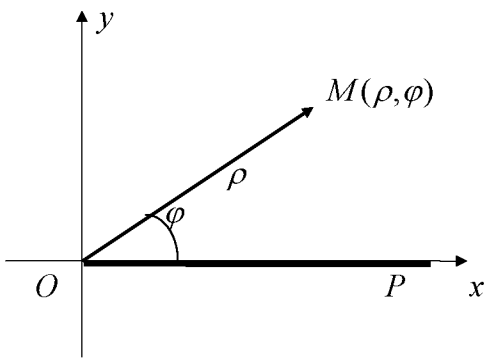

Рисунок 4.6.1.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией. Например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат, имеющая в ортонормированной декартовой системе координат уравнение $x^2 + y^2 = 1$, в полярной системе координат задается условием $\rho = 1$. Более того, в приложении 1 показано, что в полярной системе координат три различных типа линий второго порядка - эллипс, гипербола и парабола, задаются одним и тем же уравнением

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) - p = 0,$$

где $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ - некоторые константы, называемые *эксцентриситетом* и *фокальным параметром* соответственно, и что для различных значений эксцентриситета при фиксированном p получаются различные типы кривых: эллипсы при $0 < \varepsilon < 1$, параболы при $\varepsilon = 1$ и гиперболы при $\varepsilon > 1$. Соответствующие случаи показаны на рисунке 4.6.2.

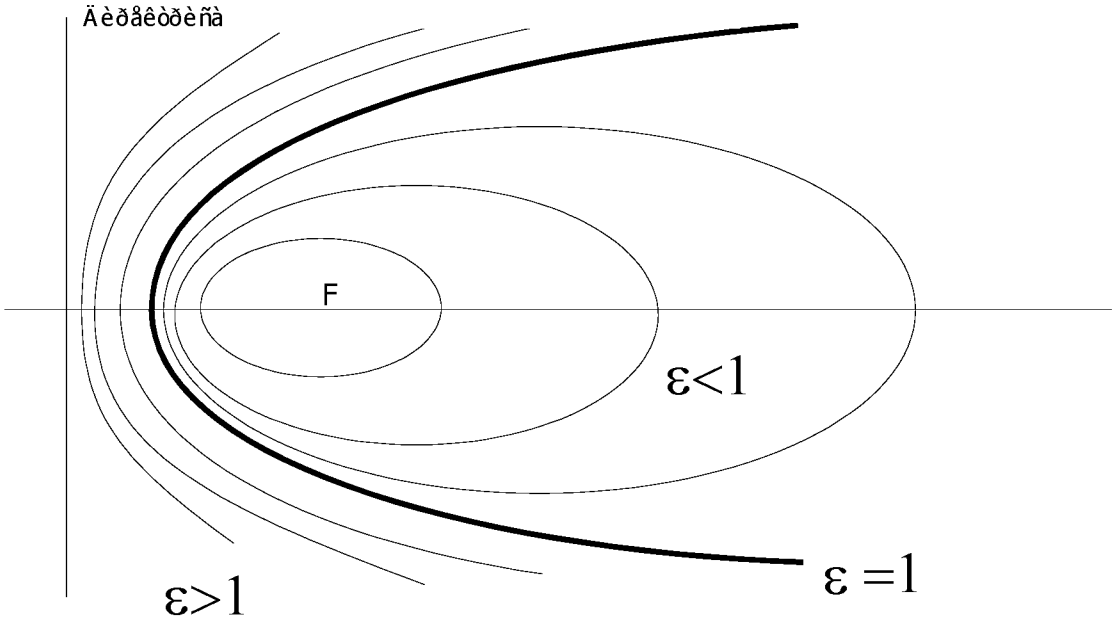

Рисунок 4.6.2. *Зависимость типа конического сечения от величины эксцентриситета.*

Проверим справедливость этого утверждения, выполнив в уравнении $\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) - p = 0$ переход от полярной к ортонормированной системе координат.

Действительно, поскольку $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то данное уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{x^2 + y^2}\left(1 - \varepsilon\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - p = 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно при соблюдении условий $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ уравнению $(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = 2\varepsilon px + p^2$.

Если $\varepsilon = 1$, то мы получаем уравнение параболы. Если же $\varepsilon \neq 1$, то исходное уравнение записывается так

$$(x - \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2})^2 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2}y^2 = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Рассуждая далее как в пункте 4° доказательства теоремы 4.4.1., можно прийти к заключению, что условие $0 < \varepsilon < 1$ приводит к эллиптическому случаю линии второго порядка, а условие $\varepsilon > 1$ - к гиперболическому типу.

Если ослабить ограничения на параметры уравнения $\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) - p = 0$, разрешив им принимать (в смысле предельного перехода) как нулевые, так и бесконечно большие, положительные значения, то можно получить и другие виды линий второго порядка, указанные в формулировке теоремы 4.4.1. Например, при $\varepsilon = 0$ и $p \neq 0$ мы имеем окружность, при $\varepsilon = 0$ и $p = 0$ - изолированную точку, а при $p = 0$ и $\varepsilon\cos\varphi = 1$ - пару пересекающихся прямых.

Определение 4.6.1. Линия, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) - p = 0$; $\forall p \geq 0$; $\forall \varepsilon \geq 0$, называется *коническим сечением*.

Действительно, различные виды линий второго порядка, включая и вырожденные случаи, могут быть получены сечением круговой конической поверхности плоскостью, что иллюстрирует рисунок 4.6.3.

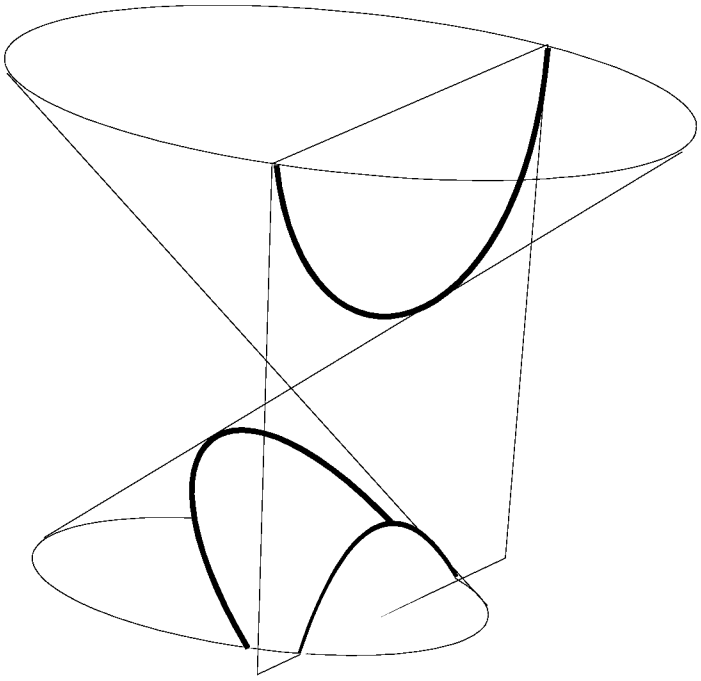

Рисунок 4.6.3. *Построение конических сечений.*

Сферическая система координат

В ряде практических приложений, требующих аналитического исследования пространственных объектов, используется так называемая *сферическая система координат*.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи упорядоченной тройки чисел $\{\rho, \varphi, \theta\}$, (рис. 4.6.4.), где

$$\rho = \left| \vec{OM} \right|, \ \varphi = \angle(\vec{Ox}, \vec{OP}), \quad \theta = \angle(\vec{OM}, \vec{Oz}),$$

которые удовлетворяют ограничениям $\rho \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

Использование сферической системы координат иногда позволяет получить более простое аналитическое описание геометрических объектов, обладающих точечной симметрией. Например, уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале координат в сферической системе будет иметь вид $\rho = 1$.

Формулы перехода между ортонормированной декартовой системой координат и сферической имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

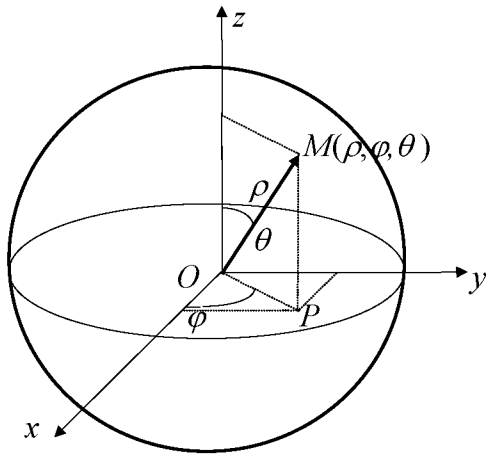

Рисунок 4.6.4.

и, для обратного перехода,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}.$$

Цилиндрическая система координат

В тех случаях, когда исследуемый пространственный объект обладает осевой симметрией, может оказаться удобным применение *цилиндрической системы координат*.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи упорядоченной тройки чисел $\{\rho,\varphi,h\}$, (рис. 4.6.5.), где $\rho=\left|\vec{QM}\right|$, $\varphi=\angle(\vec{Ox},\vec{OP})$, удовлетворяющие ограничениям

$$\rho\ge 0;\quad 0\le\varphi<2\pi;\quad h\in(-\infty,+\infty).$$

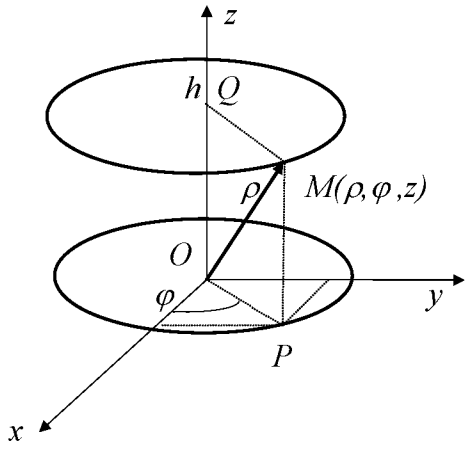

Рисунок 4.6.5.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к цилиндрической и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=h \end{cases};\quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases};\quad h=z\quad .$$