Раздел 5
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

§5.1. Произведение матриц

Определение 5.1.1.

Матрица $\|C\|$ размера mxn (с элементами $\gamma_{ji}, \forall i=[1,n], \forall j=[1,m]$) называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера mxl (с элементами α_{jk} , $\forall j=[1,m], \forall k=[1,l]$) на матрицу $\|B\|$ размера lxn (с элементами β_{ki} , $\forall k=[1,l], \forall i=[1,n]$), где $\gamma_{ji}=\sum_{k=1}^{l}\alpha_{jk}\beta_{ki}$, $\forall i=[1,n]$, $\forall j=[1,m]$

Результат произведения матриц - матрица $\|C\|$, есть матрица размера mxn при *любом* l, которая обозначается как $\|C\|=\|A\|\|B\|$. Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует рис. 5.1.1.

Пример 5.1.1.

Приведем результаты произведения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1°. Пусть размер $\|A\|$ есть 2x2, а размер $\|B\|$ - 2x1, тогда размер $\|C\|$ будет 2x1

$$\|C\|=\|A\|\|B\|=\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\beta_{11}\\ \beta_{21}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}\end{Vmatrix}.$$

2°. Если размер $\|A\|$ есть 2x2, а размер $\|B\|$ - 1x2, то размер $\|C\|$ будет 1x2

$$\|C\|=\|B\|\|A\|=\|\beta_{11}\quad \beta_{12}\|\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix}=$$

$$=\|\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{21}\beta_{12}\quad \alpha_{12}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{12}\| \quad .$$

3°. Наконец, пусть размер $\|A\|$ и $\|B\|$ есть 2x2, тогда матрица $\|C\|$ будет иметь размер 2x2

$$\|C\| = \|A\|\|B\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{Vmatrix} .$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{jl} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2i} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{li} & \cdots & \beta_{ln} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \cdots & \gamma_{ji} & \cdots & \gamma_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mi} & \cdots & \gamma_{mn} \end{Vmatrix}$$

$$\boxed{\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk}\beta_{ki}}$$

Рисунок 5.1.1.

Замечания о произведении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1°. Произведение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|$.

2°. Произведение матриц обладает свойством *ассоциативности* $\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|$.

3°. Произведение матриц обладает свойством *дистрибутивности* $\|A\|(\|B\|+\|C\|) = \|A\|\|B\|+\|A\|\|C\|$.

Отметим еще раз, что произведение двух матриц существует только тогда, когда *число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго*.

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы $\|A\|$ на подходящего размера единичную матрицу $\|E\|$ (см. §1.1.) дает в результате ту же самую матрицу $\|A\|$.

Определение 5.1.2. Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если выполнены равенства $\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|$.

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы обратной к $\|A\|$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\det\|A\| \neq 0$ [1]).

Определение 5.1.3. Матрица $\|A\|$, для которой $\det\|A\| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$ - *невырожденной*.

Лемма 5.1.1. **Если обратная матрица существует, то она единственна.**

---

[1]) Правило нахождения определителя квадратной матрицы порядка n приводится в разделе 6.

Доказательство:

Предположим, что невырожденная матрица $\|A\|$ имеет две обратные: $\|A\|_1^{-1}$ и $\|A\|_2^{-1}$. Тогда из равенств $\|A\|\|A\|_1^{-1}=\|E\|$ и $\|A\|\|A\|_2^{-1}=\|E\|$ следует,

$$\|A\|\|A\|_1^{-1}-\|A\|\|A\|_2^{-1}=\|E\|-\|E\|=\|O\|.$$

Умножая слева обе части данного равенства на $\|A\|_1^{-1}$, получаем $\|A\|_1^{-1}\|A\|(\|A\|_1^{-1}-\|A\|_2^{-1})=\|A\|_1^{-1}\|O\|=\|O\|$ или, учтя, что $\|A\|_1^{-1}\|A\|=\|E\|$, приходим к $\|A\|_1^{-1}-\|A\|_2^{-1}=\|O\|$.

Лемма доказана.

В частном случае, когда $\|A\|=\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix}$ и если $\det\|A\|\neq 0$, матрица $\|A\|^{-1}$ имеет вид

$$\|A\|^{-1}=\frac{1}{\det\|A\|}\begin{Vmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{Vmatrix}.$$

Для квадратных матриц порядка n справедливы [1]) следующие равенства

$$\det(\|A\|\|B\|)=\det(\|A\|)\det(\|B\|) \quad ;$$

$$\det\|A\|^{\mathrm{T}}=\det\|A\|; \quad \det\|A\|^{-1}=\frac{1}{\det\|A\|} \quad .$$

Пример 5.1.2. Используя матричные операции, систему линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha_{11}\xi_1+\alpha_{12}\xi_2=\beta_1\\ \alpha_{21}\xi_1+\alpha_{22}\xi_2=\beta_2\end{cases}$$

можно записать в виде $\|A\|\|x\|=\|b\|$, где

[1]) Для $n=2$ эти соотношения проверяются непосредственно по определению 1.1.9., случай произвольного n рассматривается в разделе 6 .

$$\| x \| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| ; \quad \| b \| = \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| \quad ; \quad \| A \| = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\|,$$

а ее решение (если существует $\| A \|^{-1}$), - в виде $\| x \| = \| A \|^{-1} \| b \|$.

Пример 5.1.3.

Формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой (1.8.2.) с помощью матричных операций могут быть записаны в виде

$$\left\| \begin{matrix} \vec{g}_1' \\ \vec{g}_2' \\ \vec{g}_3' \end{matrix} \right\| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\| \quad ; \quad \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| = \| S \| \left\| \begin{matrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{matrix} \right\| ,$$

где $\| S \|$ - матрица перехода.

Теорема 5.1.1.

Имеет место соотношение $(\| A \| \| B \|)^{\mathrm{T}} = \| B \|^{\mathrm{T}} \| A \|^{\mathrm{T}}$**.**

Доказательство:

Будем предполагать, что размеры матриц $\| A \|$ и $\| B \|$ таковы, что произведения матриц, указанные в формулировке теоремы, существуют.

Пусть числа α_{ik} , β_{kj} , γ_{ij} суть элементы матриц $\| A \|$, $\| B \|$ и $\| C \| = \| A \| \| B \|$ соответственно. Тогда, согласно определению 5.1.1.,

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \beta_{kj} \ .$$

Но, с другой стороны, по определению операции транспонирования 1.1.8.,

$$\gamma_{ij}^{\mathrm{T}} = \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{jk} \beta_{ki} = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{kj}^{\mathrm{T}} \beta_{ik}^{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{l} \beta_{ik}^{\mathrm{T}} \alpha_{kj}^{\mathrm{T}} ,$$

откуда, учитывая определение 5.1.1., делаем заключение о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что согласно правилу транспонирования произведения матриц равенство $\left\| \begin{matrix} \vec{g}_1' \\ \vec{g}_2' \\ \vec{g}_3' \end{matrix} \right\| = \| S \|^{\mathrm{T}} \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\|$ может быть записано в виде $\left\| \vec{g}_1' \quad \vec{g}_2' \quad \vec{g}_3' \right\| = \left\| \vec{g}_1 \quad \vec{g}_2 \quad \vec{g}_3 \right\| \| S \|$.

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1.2. **Пусть произведение квадратной матрицы $\| Q \|$ на произвольный n-компонентный столбец $\| x \|$ есть нулевой n-компонентный столбец, тогда матрица $\| Q \|$ нулевая.**

Доказательство:

Пусть $\| Q \| = \left\| \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{matrix} \right\|$. Выберем в качестве $\| x \|$ столбец вида $\left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$, где единица стоит в строке с номером i. Тогда $\| Q \| \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{1i} \\ \dots \\ \omega_{ii} \\ \dots \\ \omega_{ni} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и, в силу произвольности i, приходим к заключению о справедливости утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема 5.1.2. **Для невырожденных, одинакового размера квадратных матриц $\| A \|$ и $\| B \|$ справедливо соотношение $(\| A \| \| B \|)^{-1} = \| B \|^{-1} \| A \|^{-1}$.**

Доказательство:

1°. Пусть произведение матрицы $(\| A \| \| B \|)^{-1}$ на некоторый n-компонентный столбец $\| x \|$ есть столбец $\| c \|$. Тогда $(\| A \| \| B \|)^{-1} \| x \| = \| c \|$ или, что, то же самое, $\| x \| = \| A \| \| B \| \| c \|$ (см. определения 5.1.1. и 5.1.2.).

2°. С другой стороны, из последнего равенства получаем, что $\|A\|^{-1}\|x\| = \|B\|\|c\|$ и, аналогично, $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$.

3°. Вычитая почленно равенства $(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\|$ и $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$, приходим, в силу дистрибутивности матричного произведения, к соотношению $((\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1})\|x\| = \|o\|$, которое, по лемме 5.1.2., в виду произвольности столбца $\|x\|$, означает, что матрица $(\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}$ нулевая.

Теорема доказана.

Задача 5.1.1. *Проверить тождество* $(\|A\|^{-1})^{\mathrm{T}} = (\|A\|^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Определение 5.1.4. Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$, называется *ортогональной.*

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 5.1.3. **Для ортогональной матрицы $\|Q\|$ справедливо равенство $\det\|Q\| = \pm 1$.**

Доказательство:

Умножая равенство $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^{\mathrm{T}}$ последовательно справа и слева на $\|Q\|$, мы в силу определения 5.1.2. приходим к соотношению $\|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|E\|$. Откуда находим, что $\det^2\|Q\| = 1$, поскольку:

- определитель произведения квадратных матриц одинакового размера равен произведению определителей сомножителей;
- определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
- $\det\|E\| = 1$.

Теорема доказана.

Теорема 5.1.4. **Каждая ортогональная матрица второго порядка $\|Q\|$, для которой $\det\|Q\|=1$ может быть представлена в виде $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$, где φ - некоторое число, а каждая ортогональная матрица с $\det\|Q\|=-1$ - в виде $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix}$.**

Доказательство:

Пусть матрица $\|Q\|=\begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{Vmatrix}$ ортогональная, тогда должны быть справедливы равенства $\|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{Vmatrix}=\|E\|$ и, следовательно, $\begin{Vmatrix} \omega_{11}^2+\omega_{12}^2 & \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22} \\ \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22} & \omega_{21}^2+\omega_{22}^2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Последнее матричное равенство может быть записано в виде системы скалярных условий

$$\begin{cases} \omega_{11}^2+\omega_{12}^2=1 \\ \omega_{11}\omega_{21}+\omega_{12}\omega_{22}=0 \\ \omega_{21}^2+\omega_{22}^2=1 \end{cases}$$

причем из этих равенств, как было показано при доказательстве теоремы 5.1.3., следует, что $\det\|Q\|=\pm1$. Рассмотрим вначале случай $\det\|Q\|=1$.

Если из суммы первого и третьего уравнений системы вычесть удвоенное равенство $\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}=1$, то мы получим

$$(\omega_{11}^2+\omega_{12}^2)+(\omega_{21}^2+\omega_{22}^2)-2(\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21})=0 \quad \text{или} \quad (\omega_{11}-\omega_{22})^2+(\omega_{12}+\omega_{21})^2=0$$

откуда следует, что $\begin{cases} \omega_{11}=\ \ \omega_{22} \\ \omega_{12}=-\omega_{21} \end{cases}$.

Наконец, из условий $\omega_{11}^2+\omega_{12}^2=1$; $\omega_{21}^2+\omega_{22}^2=1$ имеем оценки $0\le\omega_{11}^2\le1$; $0\le\omega_{21}^2\le1$, которые позволяют ввести обозначения $\begin{cases} \omega_{11}=\cos\varphi \\ \omega_{21}=\sin\varphi \end{cases}$, приводящие к требуемому виду матрицы $\|Q\|$ поскольку из полученных соотношений следует, что $\omega_{11}^2+\omega_{21}^2=1$.

Случай $\det\|Q\|=-1$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие 5.1.1. **Матрица перехода от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому ортогональная .**

Доказательство:

В §1.8. было показано, что $\|S\|$ - матрица перехода от одной ортонормированной системы координат на плоскости к другой, может иметь один из двух следующих видов: $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$ или $\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{Vmatrix}$, где φ - угол между первыми базисными векторами. Но тогда матрица перехода $\|S\|$ ортогональная в силу теоремы 5.1.4.

Следствие доказано.

§5.2. Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Вводимое в курсе математического анализа понятие функции (как правила, устанавливающего однозначное соответствие между числом, принадлежащим области определения, и числом, принадлежащим множеству значений) может быть естественным образом обобщено на случай, когда область определения и область значений не являются числовыми множествами.

Определение 5.2.1. Будем говорить, что задан *оператор* $\hat{A}$, *действующий на множестве* Ω *со значениями в множестве* Θ, если указано правило, по которому каждому элементу множества Ω поставлен в соответствие единственный элемент из множества Θ.

Символически результат действия оператора $\hat{A}$ обозначается так: $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$; $y \in \Theta$. Элемент y в этом случае называется *образом элемента* x, элемент x - *прообразом элемента* y.

Определение 5.2.2. Если Θ - *область значений* некоторого оператора - является числовым множеством, то говорят, что на множестве Ω задан *функционал*.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например, $y = \Phi(x)$, $x \in \Omega$.

Пример 5.2.1.

1°. Если каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве поставлен в соответствие вектор $\vec{y}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{x}$ на некоторую ось l, то говорят, что в пространстве задан оператор $\vec{y} = \hat{\mathrm{Pr}}_l \vec{x}$ - ортогонального проектирования векторов на ось l. В этом случае символически можно записать, что $\hat{A} = \hat{\mathrm{Pr}}_l$.

2°. Каждой дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$ функции $f(\tau)$ можно поставить в однозначное соответствие $f'(\tau)$ - ее производную функцию, поэтому можно говорить об операторе дифференцирования $f'(\tau) = \dfrac{d}{d\tau} f(\tau)$, символически обозначаемом как $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$.

3°. Каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве можно поставить в однозначное соответствие число $\left|\vec{x}\right|$ - его длину. Очевидно, что данная зависимость является функционалом, заданным на множестве векторов.

4°. Для каждой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $f(\tau)$ существует однозначно вычисляемый определенный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$, который можно рассматривать как функционал $\Phi(f) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$ на множестве функций, непрерывных на $[\alpha, \beta]$.

Определение 5.2.3.

Оператором $\hat{A}$, *отображающим плоскость* (или просто *отображением плоскости*) P *на плоскость* Q, называется правило, по которому каждой точке плоскости P поставлена в соответствие единственная точка плоскости Q.

Отображение плоскости принято обозначать следующим образом: $\hat{A}: P \to Q$. Если точка M плоскости P отображается в точку M^* плоскости Q, то это представляется как $M^* = \hat{A}M$, при этом точка M^* является *образом* точки M, а точка M - *прообразом* точки M^*.

Определение 5.2.4.

Отображение $\hat{A}: P \to Q$ называется *взаимно однозначным*, если каждая точка плоскости Q имеет прообраз и притом единственный.

Определение 5.2.5. Отображение $\hat{A}$ плоскости P в саму себя называется *преобразованием* плоскости P.

Определение 5.2.6. Последовательное выполнение преобразований $M^* = \hat{A}M$ и $M^{**} = \hat{B}M^*$ называется *произведением* (*или композицией*) этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде $M^{**} = \hat{B}\hat{A}\,M$. Заметим, что в общем случае это произведение не коммутативно, но ассоциативно.

Определение 5.2.7. Преобразованием, *обратным* взаимно-однозначному преобразованию $\hat{A}: P \to Q$, называется оператор $\hat{A}^{-1}: Q \to P$ такой, что для каждой точки M плоскости P имеет место $\hat{A}^{-1}(\hat{A}M) = \hat{A}(\hat{A}^{-1}M) = M$.

Определение 5.2.8. Точка плоскости P, переводимая преобразованием $\hat{A}$ сама в себя, называется *неподвижной точкой для* $\hat{A}$. Множество на P состоящее из неподвижных точек для $\hat{A}$ называется *неподвижным для* $\hat{A}$.

Множество точек P переходящее при $\hat{A}$ само в себя называется *инвариантным множеством преобразования* $\hat{A}$.

§5.3. Линейные операторы на плоскости

Пусть на плоскости с декартовой системой координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ каждой ее точке M поставлена в однозначное соответствие точка M^*, то есть, согласно определению 5.2.6., задано преобразование этой плоскости $M^* = \hat{A}M$. Пусть координатные представления радиус-векторов этих точек суть $\left\| \vec{r}_M \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \vec{r}_{M^*} \right\|_g = \left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$, тогда координаты x^* и y^* будут некоторыми функциями от x и y $\begin{cases} x^* = F_x(x,y) \\ y^* = F_y(x,y) \end{cases}$ и потому равенство $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{matrix} \right\|$ можно рассматривать как координатное представление оператора $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$, являющегося данным преобразованием плоскости в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений виды функций $F_x(x,y)$ и $F_y(x,y)$.

Определение 5.3.1. Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ он задается формулами $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{cases}$.

При помощи операций с матрицами линейный оператор может быть записан в виде $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \|_g \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, где матрица $\| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$, являющейся его координатным представлением в $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

Определение 5.3.2. Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1. и, кроме того, $\beta_1 = \beta_2 = 0$.
Если же $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, то оператор $\hat{A}$ называется *неоднородным*.

Пример 5.3.1. К линейным однородным операторам относятся:

- оператор $\hat{A}$, действие которого сводится к умножению координат радиус-вектора прообраза на фиксированные действительные числа. Этот оператор называется "*оператором сжатия к осям*" или, просто, "*сжатием к осям*" и имеет в ортонормированном базисе матрицу $\| \hat{A} \|_e = \begin{Vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Vmatrix}$, где положительные числа κ_1 и κ_2 - *коэффициенты сжатия*;
- оператор *ортогонального проектирования* радиус-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат.

Теорема 5.3.1. **Для линейного однородного оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения:**

$$\mathbf{1^\circ.}\ \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2, \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$\mathbf{2^\circ.}\ \hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A}\vec{r}, \quad \forall \vec{r}, \lambda$$

Доказательство:

В справедливости утверждения теоремы убедимся непосредственной проверкой, используя правила действия с матрицами. Например, для 1° имеем

$$\hat{A}(\vec{r_1}+\vec{r_2}) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \left(\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix} \right) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Vmatrix} =$$
$$= \hat{A}\vec{r_1} + \hat{A}\vec{r_2} \quad .$$

Теорема доказана.

Теорема 5.3.2.

Если для некоторого оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения

1°. $\hat{A}(\vec{r_1}+\vec{r_2}) = \hat{A}\vec{r_1} + \hat{A}\vec{r_2}$, $\forall \vec{r_1}, \vec{r_2}$

2°. $\hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A}\vec{r}$, $\forall \vec{r}, \lambda$,

то этот оператор линейный и однородный.

Доказательство:

Пусть $\vec{r} = x\vec{g_1} + y\vec{g_2}$ и $\hat{A}\vec{r} = x^*\vec{g_1} + y^*\vec{g_2}$ - соответственно координатные разложения для прообраза и образа, тогда

$$x^*\vec{g_1} + y^*\vec{g_2} = \hat{A}(x\vec{g_1} + y\vec{g_2}) = x\hat{A}\vec{g_1} + y\hat{A}\vec{g_2} \ .$$

Вводя обозначения $\hat{A}\vec{g_1} = \alpha_{11}\vec{g_1} + \alpha_{21}\vec{g_2}$ и $\hat{A}\vec{g_2} = \alpha_{12}\vec{g_1} + \alpha_{22}\vec{g_2}$, получаем

$$x^*\vec{g_1} + y^*\vec{g_2} = x\hat{A}\vec{g_1} + y\hat{A}\vec{g_2} = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y)\vec{g_1} + (\alpha_{21}x + \alpha_{22}y)\vec{g_2} \ .$$

И, окончательно, $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{cases}$, или $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}_g \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$.

Теорема доказана.

Отметим также, что образом вектора $\vec{a}$ с $\begin{Vmatrix} \vec{a} \end{Vmatrix}_g = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix}$ в базисе $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}\}$ является вектор $\hat{A}\vec{a}$ с координатным представлением $\begin{Vmatrix} \hat{A}\vec{a} \end{Vmatrix}_g = \begin{Vmatrix} a_x^* \\ a_y^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \end{Vmatrix}$.

Из теорем 5.3.1. и 5.3.2. вытекают:

Следствие 5.3.1.

Столбцами матрицы линейного однородного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}\}$ являются координатные представления векторов $\hat{A}\vec{g_1}$ и $\hat{A}\vec{g_2}$.

Следствие 5.3.2. **Каждому линейному однородному оператору преобразования плоскости в конкретном базисе соответствует квадратная матрица второго порядка, а каждая квадратная матрица второго порядка задает в этом базисе некоторый линейный однородный оператор**.

Задача 5.3.1. *Исходя из правил действия с матрицами, показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1°. *Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц сомножителей*: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g$.

2°. *Если* $\hat{A}^{-1}$ *есть оператор, обратный линейному однородному оператору* $\hat{A}$ *, то* $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Выясним теперь, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

Теорема 5.3.3. **Пусть в системе координат** $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ **некоторый однородный линейный оператор имеет матрицу** $\|\hat{A}\|_g$**. Тогда в системе координат** $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ **этот оператор будет иметь матрицу** $\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1}\|\hat{A}\|_g\|S\|$**, где** $\|S\|$ **- матрица перехода от** $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ **к** $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$.

Доказательство:

Пусть в исходной системе координат действие задается формулой $\left\|\vec{r}^*\right\|_g = \|\hat{A}\|_g \left\|\vec{r}\right\|_g$, а в новой системе координат - $\left\|\vec{r}^*\right\|_{g'} = \|\hat{A}\|_{g'} \left\|\vec{r}\right\|_{g'}$, и пусть $\|S\|$ - матрица перехода от $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ к $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ с формулами перехода $\left\|\vec{r}\right\|_g = \|S\| \left\|\vec{r}\right\|_{g'}$ и $\left\|\vec{r}^*\right\|_g = \|S\| \left\|\vec{r}^*\right\|_{g'}$.

Подставляя два последних соотношения в первое и принимая во внимание утверждение теоремы 1.8.2. о невырожденности матрицы перехода $\|S\|$ (то есть, существование матрицы $\|S\|^{-1}$), получаем, что

$$\|S\| \left\|\vec{r}^*\right\|_{g'} = \|\hat{A}\|_g \|S\| \left\|\vec{r}\right\|_{g'} \quad \text{или} \quad \left\|\vec{r}^*\right\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \left\|\vec{r}\right\|_{g'}.$$

Наконец, вычитая последнее равенство почленно из равенства $\left\| \vec{r}^{\,*} \right\|_{g'} = \left\| \hat{A} \right\|_{g'} \left\| \vec{r} \right\|_{g'}$, в силу произвольности $\left\| \vec{r} \right\|_{g'}$ (согласно лемме 5.1.2.) приходим к соотношению $\left\| \hat{A} \right\|_{g'} = \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{g} \left\| S \right\|$.

Теорема доказана.

Следствие 5.3.3. **Величина** $\det\left\| \hat{A} \right\|_{g}$ **не зависит от выбора базиса.**

Доказательство:

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, то, в силу теоремы 5.3.3. и невырожденности матрицы перехода $\left\| S \right\|$, имеем

$$\det\left\| A \right\|_{g'} = \det\left(\left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{g} \left\| S \right\| \right) = \det\left\| S \right\|^{-1} \cdot \det\left\| \hat{A} \right\|_{g} \cdot \det\left\| S \right\| =$$

$$= \frac{1}{\det\left\| S \right\|} \cdot \det\left\| \hat{A} \right\|_{g} \cdot \det\left\| S \right\| = \det\left\| \hat{A} \right\|_{g} .$$

Следствие доказано.

Задача 5.3.2. *В ортонормированной системе координат найти матрицу оператора, ортогонально проектирующего радиус-векторы точек координатной плоскости на прямую* $x + 3y - 2 = 0$.

Решение: Пусть точка-прообраз M имеет радиус-вектор $\vec{r}_0 = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$, а точка M^* - образ точки M, соответственно ее радиус-вектор $\vec{r}_0^{\,*} = \begin{Vmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{Vmatrix}$.

Из рис. 5.3.1. следует, что M^* есть точка пересечения прямой $x + 3y - 2 = 0$ и перпендикуляра к ней, проходящего через M.

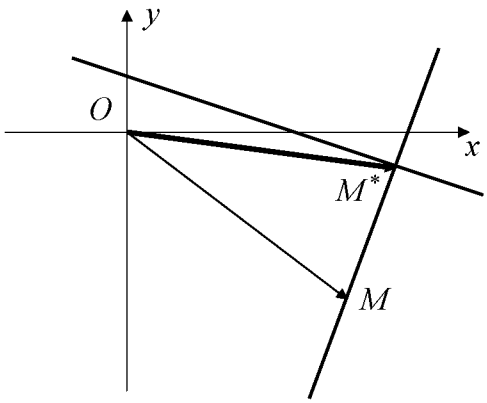

Рисунок 5.3.1.

Поскольку нормальный вектор прямой $x+3y-2=0$ является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего будет иметь вид $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \tau \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$. Откуда следует, что координаты радиус-вектора точки M^* будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \tau \\ y_0^* = y_0 + 3\tau \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0^* = \dfrac{9}{10}x_0 - \dfrac{3}{10}y_0 + \dfrac{1}{5} \\ y_0^* = -\dfrac{3}{10}x_0 + \dfrac{1}{10}y_0 + \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Используя правила операций с матрицами, получаем окончательно, что

$$\begin{Vmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{9}{10} & -\dfrac{3}{10} \\ -\dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{10} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3}{5} \end{Vmatrix}, \text{ то есть } \| \hat{A} \|_e = \begin{Vmatrix} \dfrac{9}{10} & -\dfrac{3}{10} \\ -\dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{10} \end{Vmatrix}.$$

§5.4. Аффинные преобразования и их свойства

Линейные операторы, преобразующие плоскость саму в себя (то есть линейные операторы вида $\hat{A}: P \to P$) и *имеющие обратный*, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

Определение 5.4.1. Линейный оператор $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \|_g \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, отображающий плоскость P саму на себя, с матрицей $\| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$, для которой в любом базисе $\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0$, называется *аффинным преобразованием плоскости.*

Теорема 5.4.1. **Если линейное преобразование аффинное в некоторой декартовой системе координат, то это преобразование будет аффинным и в любой другой декартовой системе координат.**

Доказательство:

По следствию 5.3.3. определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, поэтому для аффинности линейного преобразования достаточно, чтобы $\det \| \hat{A} \|_g \neq 0$ хотя бы в одном базисе.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.2. **Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное, которое также является аффинным.**

Доказательство:

Поскольку $\det\left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$, то матрица $\left\| \hat{A} \right\|_g^{-1}$ существует, единственна и невырожденная (см. §5.1.), а, в силу теоремы 1.1.2., система линейных уравнений $\left\| \hat{A} \right\|_g \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$ всегда имеет единственное решение $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$ для любого вектора $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$. Но это означает, что между образами и прообразами аффинного преобразования существует взаимно однозначное соответствие, то есть для $\hat{A}$ существует единственное обратное аффинное преобразование, задаваемое формулами $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \left\| \hat{A} \right\|_g^{-1} \begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{Vmatrix}$, где $\begin{Vmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{Vmatrix} = -\left\| \hat{A} \right\|_g^{-1} \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$.

Теорема доказана.

Для выяснения геометрического смысла числовых характеристик матрицы аффинного преобразования переформулируем определение 1.8.3. *ориентации пары неколлинеарных векторов* на плоскости, использовавшись операцией векторного произведения.

Определение 5.4.2. Пусть $\vec{n}$ есть некоторый нормальный вектор плоскости P, направленный в сторону наблюдателя. Тогда пару неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем *право ориентированной*, если существует $\lambda > 0$ такое, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \vec{n}$ и, соответственно, - *лево ориентированной*, если существует $\lambda < 0$ такое, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \vec{n}$.

Тогда будет справедлива

Теорема 5.4.3. **1°. При аффинном преобразовании отношение площади образа параллелограмма к площади самого параллелограмма равно абсолютной величине** $\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$**.**

2°. При аффинном преобразовании ориентация образов пары векторов совпадает с ориентацией прообразов, если $\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix} > 0$**, и меняется на противоположную, если** $\det\begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix} < 0$**.**

Доказательство:

Рассмотрим некоторый базис образованный векторами $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, образы которых при аффинном преобразовании $\hat{A}$ есть соответственно $\vec{g}_1^{\,*} = \hat{A}\vec{g}_1 = \alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2$ и $\vec{g}_2^{\,*} = \hat{A}\vec{g}_2 = \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2$ (рис. 5.4.1.), где, согласно следствию 5.3.2., коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ и α_{22} являются элементами матрицы линейного оператора $\hat{A}$, то есть $\|\hat{A}\|_g = \begin{Vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{Vmatrix}$.

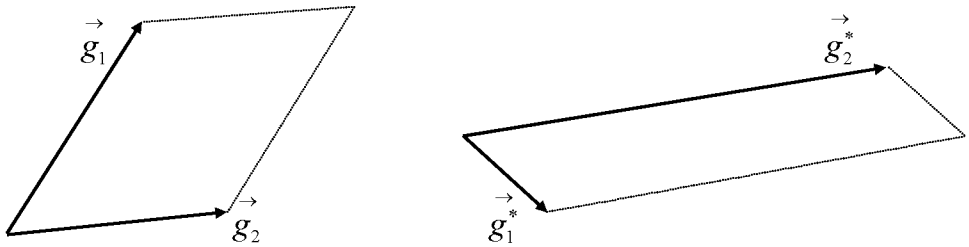

Рисунок 5.4.1.

По свойству векторного произведения (см. §2.4.) площадь параллелограмма построенного на базисных векторах $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, $S = \left|[\vec{g}_1, \vec{g}_2]\right|$, а площадь параллелограмма построенного на образах базисных векторов $S^* = \left|[\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_2^{\,*}]\right|$. Поскольку

$$[\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_2^{\,*}] = [\alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2, \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2] = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})[\vec{g}_1, \vec{g}_2] =$$
$$= \det\|\hat{A}\|_g [\vec{g}_1, \vec{g}_2],$$

то $S^* = \left|\det\|\hat{A}\|_g\right| S$, а ориентация пары векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ не меняется при $\det\|\hat{A}\|_g > 0$ и меняется на противоположную при $\det\|\hat{A}\|_g < 0$.

Наконец отметим, что полученные соотношения будут выполнены для любого базиса, а, значит, и для любого параллелограмма.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.4. **При аффинном преобразовании всякий базис переходит в базис, а для любых двух базисов существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй**.

Доказательство:

Пусть аффинное преобразование задано формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{cases},$$

тогда образами первой пары базисных векторов будут векторы

$$\vec{g}_1^* = \alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2$$

$$\vec{g}_2^* = \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2$$

А, поскольку $\det\|\hat{A}\|^{\mathrm{T}} = \det\|\hat{A}\| = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0$, то векторы $\vec{g}_1^*$ и $\vec{g}_2^*$ линейно независимы (теорема 1.6.2.) и из них можно образовать базис.

Сопоставляя определение 1.8.2. и следствие 5.3.1., замечаем, что, в том случае, когда базис $\{\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$ является образом базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ при аффинном преобразовании $\hat{A}$, матрица перехода от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ к базису $\{\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$ $\|S\| = \|\hat{A}\|_g$. Но, поскольку для любой пары базисов матрица перехода существует, единственна и невырождена, то будет существовать единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что происходит с различными геометрическими объектами на плоскости при аффинном преобразовании.

Теорема 5.4.5. **При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая**.

Доказательство:

Пусть даны прямая $\begin{cases} x = x_0 + \tau p \\ y = y_0 + \tau q \end{cases}$, где p и q - (не равные нулю одновременно) координаты направляющего вектора прямой, и аффинное преобразование $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \| \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$. Тогда образом прямой будет множество точек плоскости с координатами $\begin{cases} x^* = (\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \beta_1) + (\alpha_{11}p + \alpha_{12}q)\tau \\ y^* = (\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \beta_2) + (\alpha_{21}p + \alpha_{22}q)\tau \end{cases}$, так как $\begin{cases} p^* = \alpha_{11}p + \alpha_{12}q \\ q^* = \alpha_{21}p + \alpha_{22}q \end{cases}$. Заметим, что, если $\left|\alpha_{11}p + \alpha_{12}q\right| + \left|\alpha_{21}p + \alpha_{22}q\right| > 0$, то мы имеем прямую.

Предположим противное, пусть $\begin{cases} \alpha_{11}p + \alpha_{12}q = 0 \\ \alpha_{21}p + \alpha_{22}q = 0 \end{cases}$, но в силу аффинности преобразования $\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \neq 0$ и, следовательно, по теореме 1.1.2., $p = q = 0$ есть *единственное* решение этой системы уравнений, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.6. **При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, общая точка пересекающихся прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.**

Доказательство:

Предположим, что пара параллельных прямых переведена аффинным преобразованием в пересекающиеся или совпадающие прямые.

Рассмотрим одну из точек, общих для образов прямых. Поскольку аффинное преобразование взаимно однозначно, то прообраз общей точки единственный и должен принадлежать одновременно каждой из прямых-прообразов.

Однако таких точек нет, ибо прямые-прообразы параллельны. Следовательно, образы параллельных прямых также параллельны.

Если же прямые-прообразы пересекаются, то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования, образом их точки пересечения может быть только точка пересечения образов этих прямых.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.7 **При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.**

Доказательство:

Пусть точки M_i^*; $i=1,2,3$ с координатами $\begin{Vmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{Vmatrix}$ являются образами (рис. 5.4.2.) точек M_i ; $i=1,2,3$ соответственно с координатами $\begin{Vmatrix} x_i \\ y_i \end{Vmatrix}$. И пусть дано, что $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\lambda$, и $\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=\lambda$, где $\lambda \neq -1$, нужно показать, что

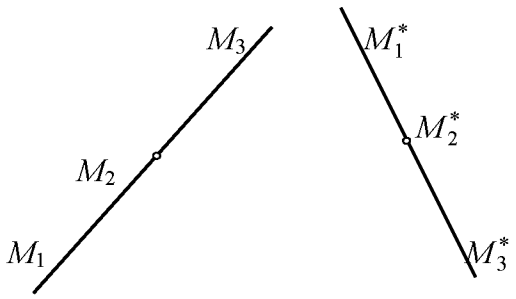

Рисунок 5.4.2.

$$\frac{x_2^*-x_1^*}{x_3^*-x_2^*}=\lambda \text{ и } \frac{y_2^*-y_1^*}{y_3^*-y_2^*}=\lambda .$$

Если аффинное преобразование задано в виде $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\beta_2 \end{cases}$, то

$$\frac{x_2^*-x_1^*}{x_3^*-x_2^*}=\frac{\alpha_{11}(x_2-x_1)+\alpha_{12}(y_2-y_1)}{\alpha_{11}(x_3-x_2)+\alpha_{12}(y_3-y_2)}=\frac{\alpha_{11}\lambda(x_3-x_2)+\alpha_{12}\lambda(y_3-y_2)}{\alpha_{11}(x_3-x_2)+\alpha_{12}(y_3-y_2)}=\lambda .$$

Аналогично показывается, что $\dfrac{y_2^*-y_1^*}{y_3^*-y_2^*}=\lambda$.

Заметим, что в ортонормированной системе координат из полученных соотношений следует равенство отношения длин образов и отношения длин прообразов отрезков, лежащих на одной прямой:

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_1^*M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3^*M_2^*}\right|}=\frac{\sqrt{(x_2^*-x_1^*)^2+(y_2^*-y_1^*)^2}}{\sqrt{(x_3^*-x_2^*)^2+(y_3^*-y_2^*)^2}}=\frac{|\lambda|\sqrt{(x_3^*-x_2^*)^2+(y_3^*-y_2^*)^2}}{\sqrt{(x_3^*-x_2^*)^2+(y_3^*-y_2^*)^2}}=|\lambda|=$$

$$=\frac{|\lambda|\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}=\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_2M_3}\right|} .$$

Теорема доказана.

Отметим также, что из теоремы 5.4.7. непосредственно вытекает, что при аффинном преобразовании отрезок прямой переходит в отрезок.

Теорема 5.4.8. **При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин их прообразов.**

Доказательство:

Пусть дано, что $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|}=\lambda$. Проведем прямую M_3M_3', параллельную M_4M_2. Поскольку при аффинном преобразовании образы параллельных прямых параллельны, то в силу теоремы 5.4.6. $M_4\,M_2\,M_3'\,M_3$ и $M_4^*M_2^*M_3'^*M_3^*$ - параллелограммы. (Рис. 5.4.3.). Следовательно, $\left|\overrightarrow{M_2^*M_4^*}\right|=\left|\overrightarrow{M_3^*M_3'^*}\right|$.

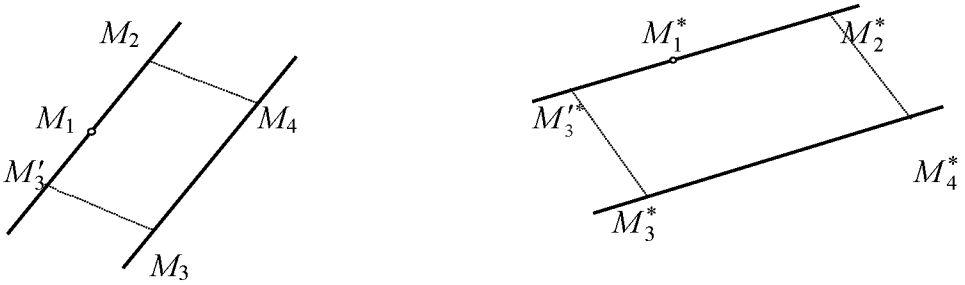

Рисунок 5.4.3.

Наконец по теореме 5.4.7., получаем

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_1^*M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3^*M_4^*}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1^*M_2^*}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3'^*M_2^*}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3'M_2}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{M_3M_4}\right|}=|\lambda|.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.4.9. **При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной**.

Доказательство:

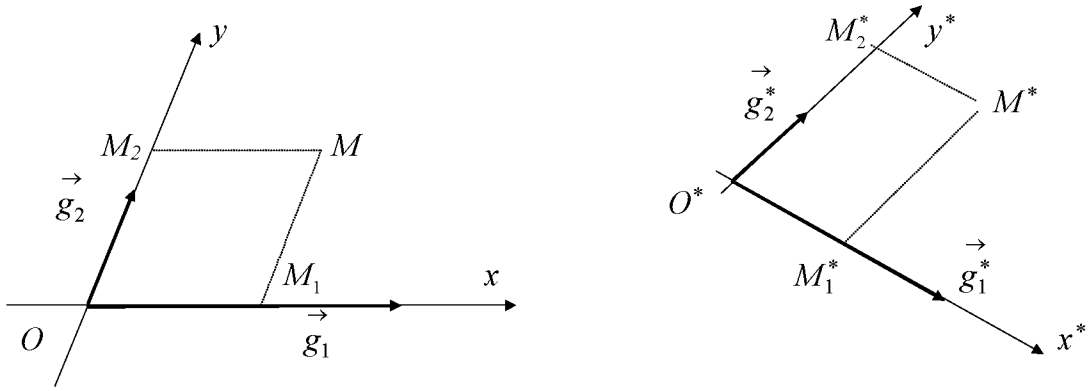

Рисунок 5.4.4.

Пусть исходная система координат образована базисом $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и началом координат O. Согласно теореме 5.4.4. при аффинном преобразовании базис переходит в базис. Дополняя преобразованный базис образом начала координат O^*, мы получаем преобразованную систему координат $\{O^*, \vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*\}$.

Пусть в исходной системе координаты точки-прообраза M суть x и y, а в преобразованной системе координаты точки-образа M^* суть x^* и y^* (рис. 5.4.4.), тогда в силу теоремы 5.4.7. будут справедливы соотношения

$$|x| = \frac{\left|\overrightarrow{OM_1}\right|}{\left|\vec{g}_1\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{O^*M_1^*}\right|}{\left|\vec{g}_1^*\right|} = |x^*| \quad ; \quad |y| = \frac{\left|\overrightarrow{OM_2}\right|}{\left|\vec{g}_2\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{O^*M_2^*}\right|}{\left|\vec{g}_2^*\right|} = |y^*|.$$

После естественного обобщения на случай разных знаков получаем доказываемое свойство.

Теорема доказана.

Теорема 5.4.10.

Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы 4.4.1. и не являющейся пустым множеством:

- **при аффинном преобразовании ее тип не может измениться;**
- **найдется аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа.**

Доказательство:

Рассмотрим первое утверждение теоремы.

1°. В силу теорем 5.4.6. и 5.4.8. параллелограмм вместе со своей внутренней частью переходит в параллелограмм и, значит, ограниченная кривая перейдет в ограниченную. Отсюда следует, что эллипсы и точки могут переходить только в эллипсы и точки. С другой стороны, точка не может переходить в эллипс и наоборот, поскольку это противоречит свойству взаимной однозначности аффинного преобразования.

2°. Среди линий второго порядка только гиперболы и параллельные прямые имеют несвязанные ветви, то есть существует прямая, не пересекающая линию второго порядка такая, что ветви этой линии расположены по разные стороны от прямой. Сохранение данного свойства при аффинном преобразовании очевидно. Параллельные же прямые не могут перейти в ветви гиперболы в силу теоремы 5.4.6.

3°. Среди непрямых линий второго порядка только парабола является неограниченной, связной кривой. Следовательно, при аффинном преобразовании парабола может перейти только в параболу.

4°. Если линия второго порядка есть точка, прямая или же пара параллельных или пересекающихся прямых, то из утверждения теорем 5.4.5. и 5.4.6. вытекает, что их тип не может измениться.

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Из теорем 4.4.1. и 5.4.1. следует, что для каждой линии второго порядка может быть построено аффинное преобразование, приводящее уравнение линии к одному из следующих девяти видов:

$$\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 = \pm 1 \quad ; \quad x'^2 - y'^2 = 1 \\ &x'^2 \pm y'^2 = 0 \quad ; \quad y'^2 \pm 1 = 0 \quad ; \quad y'^2 - 2x' = 0 \quad ; \quad y'^2 = 0 \quad . \end{aligned} \qquad (5.4.1.)$$

Но, поскольку уравнения любой пары линий, принадлежащих к одному и тому же типу, приводятся двумя различными аффинными преобразованиями к одному и тому же виду из списка (5.4.1.), то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования и очевидной аффинности произведения аффинных преобразований следует справедливость второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Замечание: изменение при аффинном преобразовании типа линии второго порядка оказывается также невозможным и для случая "пустых множеств". Справедливость этого утверждения будет показана в §9.4. (теорема 9.4.1.)

Теорема 5.4.11. **Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.**

Доказательство:

Рассмотрим ортонормированную систему координат. Пусть пара исходных взаимно ортогональных направлений задается в ней ненулевыми векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ с координатными представлениями $\left\|\vec{p}\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\|$ и $\left\|\vec{q}\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\eta\\ -\xi\end{matrix}\right\|$.

Потребуем, чтобы их образы (ненулевые в силу аффинности)

$$\left\|\vec{p}^*\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11}\xi+\alpha_{12}\eta\\ \alpha_{21}\xi+\alpha_{22}\eta\end{matrix}\right\| \qquad \left\|\vec{q}^*\right\|_e = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\eta\\ -\xi\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\alpha_{11}\eta-\alpha_{12}\xi\\ \alpha_{21}\eta-\alpha_{22}\xi\end{matrix}\right\|$$

были также взаимно ортогональны. Условие ортогональности векторов $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ имеет вид

$$(\alpha_{11}\xi+\alpha_{12}\eta)(\alpha_{11}\eta-\alpha_{12}\xi)+(\alpha_{21}\xi+\alpha_{22}\eta)(\alpha_{21}\eta-\alpha_{22}\xi)=0 \text{ или}$$

$$-(\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22})\xi^2+(\alpha_{11}^2-\alpha_{12}^2+\alpha_{21}^2-\alpha_{22}^2)\xi\eta+(\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22})\eta^2=0,$$

а после переобозначения коэффициентов,

$$-U\xi^2+2V\xi\eta+U\eta^2=0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $U=V=0$. В этом случае любая пара взаимно ортогональных векторов данным преобразованием переводится во взаимно ортогональную пару векторов.

2) $U=0$ и $V\neq 0$. Тогда $\xi\eta=0$, то есть искомая пара векторов - базисная.

3) Наконец, если $U\neq 0$, то отношение координат векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ находится из квадратного уравнения $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2-\frac{2V}{U}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)-1=0$, имеющего действительные решения $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)_{1,2}=\frac{V}{U}\pm\sqrt{\frac{V^2}{U^2}+1}$ при любом ненулевом U.

Теорема доказана.

§5.5. Ортогональные преобразования плоскости

Определение 5.5.1. *Ортогональным преобразованием* плоскости P называется линейный оператор $\hat{Q}$ вида $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Vmatrix}$, матрица которого $\|\hat{Q}\|_e = \begin{Vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{Vmatrix}$ ортогональная в любой ортонормированной системе координат.

Заметим, что ортогональное преобразование является частным случаем аффинного преобразования, поскольку, в силу теоремы 5.1.3., имеет место либо $\det\|\hat{Q}\|_e = 1$, либо $\det\|\hat{Q}\|_e = -1$. Помимо приведенных в §5.4. аффинных свойств, ортогональные преобразования обладают своими специфическими особенностями. Рассмотрим основные из них.

Признак того, что некоторый линейный оператор является ортогональным, может быть сформулирован как

Теорема 5.5.1. **Линейный оператор на плоскости является ортогональным, если его матрица ортогональная хотя бы в одной ортонормированной системе координат.**

Доказательство:

Пусть на плоскости P имеются два ортонормированных базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ с матрицей перехода $\|S\|$. Согласно следствию 5.1.1. эта матрица также ортогональная и для нее справедливо равенство $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$, и пусть матрица линейного оператора $\hat{Q}$ ортогональна в исходном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, то есть для нее $\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|Q\|_e^{\mathrm{T}}$.

Перейдем к базису $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в котором матрица линейного оператора $\hat{Q}$ согласно теореме 5.3.3. будет иметь вид $\|\hat{Q}\|_{e'} = \|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e\|S\|$. Найдем в новом базисе матрицу $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1}$. Используя теоремы 5.1.1. и 5.1.2. , а также ортогональность матриц $\|S\|$ и $\|\hat{Q}\|_e$, получим

$$\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} = (\|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e\|S\|)^{-1} = \|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e^{-1}(\|S\|^{-1})^{-1} = \|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e^{-1}\|S\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{Q}\|_e^{\mathrm{T}}(\|S\|^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} =$$
$$= (\|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{Q}\|_e\|S\|)^{\mathrm{T}} = (\|S\|^{-1}\|\hat{Q}\|_e\|S\|)^{\mathrm{T}} = \|\hat{Q}\|_{e'}^{\mathrm{T}} \quad .$$

Но равенство $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} = \|Q\|_{e'}^{\mathrm{T}}$ означает, что матрица линейного оператора $\hat{Q}$ ортогональная и в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$.

Теорема доказана.

Теорема 5.5.2. **В ортонормированной системе координат ортогональное преобразование плоскости сохраняет:**

1°. Скалярное произведение векторов;

2°. Длины векторов и расстояния между точками плоскости;

3°. Углы между прямыми.

Доказательство:

1°. Пусть дано ортогональное преобразование плоскости $\hat{Q}$ с матрицей $\|\hat{Q}\|_e$ в ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Из полученных в §2.3. результатов следует, что в ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатными представлениями $\|\vec{a}\|_e = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ и $\|\vec{b}\|_e = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix}$ может быть представлено в следующем виде

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \|\vec{a}\|_e^{\mathrm{T}} \|\vec{b}\|_e$$

Тогда, для скалярного произведения образов векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, принимая во внимание ортогональность матрицы $\|\hat{Q}\|_e$, получаем

$$(\hat{Q}\vec{a}, \hat{Q}\vec{b}) = (\|\hat{Q}\|_e \|\vec{a}\|_e)^{\mathrm{T}} \|\hat{Q}\|_e \|\vec{b}\|_e = \|\vec{a}\|_e^{\mathrm{T}} \|\hat{Q}\|_e^{\mathrm{T}} \|\hat{Q}\|_e \|\vec{b}\|_e =$$

$$= \|\vec{a}\|_e^{\mathrm{T}} \|\hat{Q}\|_e^{-1} \|\hat{Q}\| \|\vec{b}\|_e = \|\vec{a}\|_e^{\mathrm{T}} \|E\| \|\vec{b}\|_e = \|\vec{a}\|_e^{\mathrm{T}} \|\vec{b}\|_e = (\vec{a}, \vec{b})$$

Равенство $(\hat{Q}\vec{a}, \hat{Q}\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$, $\forall \vec{a}, \vec{b}$ и означает, что при ортогональном преобразовании плоскости скалярное преобразование сохраняется в любом ортонормированном базисе.

2°. Из сохранения при ортогональном преобразовании скалярного произведения для любой пары векторов следует сохранение длин векторов, поскольку этом случае

$$\left|\hat{Q}\vec{a}\right| = \sqrt{(\hat{Q}\vec{a}, \hat{Q}\vec{a})} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \left|\vec{a}\right|, \quad \forall \vec{a} \quad .$$

3°. Поскольку в силу 2° при ортогональном преобразовании равные треугольники переходят в равные, то будут сохраняться и величины углов между векторами на плоскости.

Теорема доказана.

Используя свойства ортогональных преобразований, можно показать, что для аффинных преобразований справедлива следующая важная теорема.

Теорема 5.5.3. **Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.**

Доказательство:

1°. В силу следствий 5.3.1. и 5.3.2., а также справедливости утверждений задачи 5.3.1. и примера 5.3.1., нам достаточно убедиться, что матрица каждого аффинного преобразования в любом ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и диагональной матрицы с положительными значениями диагональных элементов.

2°. По теореме 5.4.11. существует ортогональный (но не обязательно нормированный) базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, в который данное аффинное преобразование $\hat{A}$ переведет исходный ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. При этом существуют положительные нормирующие множители κ_1 и κ_2 такие, что

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{g}_1}{\kappa_1}; \quad \vec{e}_2' = \frac{\vec{g}_2}{\kappa_2}; \quad \kappa_1 = \left|\vec{g}_1\right|; \quad \kappa_2 = \left|\vec{g}_2\right|$$

А это означает, что $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ - базис и притом ортонормированный.

3°. С другой стороны, линейное преобразование $\hat{Q}$, переводящее ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в ортонормированный базис $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$, очевидно ортогональное и имеет в исходном базисе ортогональную матрицу $\left\|\hat{Q}\right\|_e$. Тогда будут справедливы соотношения

$$\begin{Vmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{Vmatrix} = \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{Vmatrix} = \left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Vmatrix},$$

из которых следует равенство $\left(\left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} - \begin{Vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Vmatrix} \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}\right) \begin{Vmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{o} \\ \vec{o} \end{Vmatrix}$.

Тогда, в силу линейной независимости базисных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, мы имеем $\left\|\hat{A}\right\|_e^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Vmatrix} \left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}$ или, после транспонирования обеих этого равенства, $\left\|\hat{A}\right\|_e = \left\|\hat{Q}\right\|_e \begin{Vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{Vmatrix}$.

Таким образом, аффинное преобразование представимо в виде произведения ортогонального преобразования и оператора "сжатия к осям" (см. пример 5.3.1.)

Теорема доказана.

§5.6. Понятие группы

Определение 5.6.1.

Множество G называется *группой по отношению к заданной операции*, если любым двум его элементам x и y оставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый *произведением* и обозначаемый xy, и если выполняются следующие условия:

1°. $x(yz) = (xy)z$;

2°. существует элемент e такой, что для любого $x \in G$ $xe = ex = x$;

3°. для каждого x существует элемент x^{-1} такой, что $x^{-1}x = e$.

Если, кроме того, $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Пример 5.6.1.

К группам относятся, например, следующие множества:

1) Множество вещественных чисел относительно операции сложения образует группу, где e - число 0.

2) Множество положительных вещественных чисел образует группу относительно операции умножения, где e - число 1.

3) Множество поворотов плоскости вокруг фиксированной точки образует группу относительно операции композиции.

4) Множество аффинных преобразований плоскости образует группу относительно операции композиции.