Раздел 6
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§6.1. Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1,2,3,\ldots,n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без повторений) как $\{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 6.1.1. Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка,* или *инверсию*), если при $i<j$ имеет место $k_i>k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n\}$ будем обозначать $\text{Б}(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)$. Например, $\text{Б}(3,1,4,2)=3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\|=\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}=\|\alpha_{ij}\|;\quad i,j=[1,n].$$

Определение 6.1.2. *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\|A\|$ размера $n\times n$ называется число $\det\|A\|$, получаемое по формуле

$$\det \| A \| = \sum_{\{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n\}} (-1)^{Б(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n},$$

где $\{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n\}$ - всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы $\| A \|$.

Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.

Из определения 6.1.2. также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Задача 6.1.1. *Проверить совпадение определения* 6.1.2. *и определения детерминантов второго и третьего порядка* 1.1.9. *и* 1.1.10.

§6.2. Свойства определителей

Теорема 6.2.1. **При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.**

Доказательство:

Общий вид слагаемого в формуле определителя транспонированной матрицы $\| B \| = \| A \|^{\mathrm{T}}$ будет $(-1)^{Б(m_1,m_2,\ldots,m_n)} \beta_{1m_1} \beta_{2m_2} \ldots \beta_{nm_n}$, но, учитывая, что $\beta_{k\,m_k} = \alpha_{m_k k}$ получим $\det \| A \|^{\mathrm{T}} = \sum_{\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}} (-1)^{Б(m_1,m_2,\ldots,m_n)} \alpha_{m_1 1} \alpha_{m_2 2} \ldots \alpha_{m_n n}$.

Упорядочим сомножители каждого слагаемого по номерам строк, то есть приведем их к виду $(-1)^{Б(m_1,m_2,\ldots,m_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \ldots \alpha_{nk_n}$, где 1,2,3,…$n$ - номера строк, а $k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n$ - номера соответствующих столбцов. Отметим, что для введенных обозначений имеет место очевидное равенство: $k_{m_i} = i$; $\forall i$.

При выполненном изменении порядка сомножителей для каждого слагаемого в формуле определителя будет иметь место равенство

$$Б(m_1,m_2,\ldots,m_n) = Б(k_1,k_2,\ldots,k_n).$$

Действительно, пусть m_i и m_j дают беспорядок, то есть $m_i > m_j$ при $i < j$, тогда дают беспорядок и числа k_{m_i} и k_{m_j}, поскольку для $\forall i$: $k_{m_i} = i$ и значит, будет справедливо неравенство $k_{m_i} = i < j = k_{m_j}$ при $m_i > m_j$.

Окончательно получаем $\det \| A \|^{\mathrm{T}} = \sum_{\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\mathrm{E}(k_1,k_2,\ldots,k_n)} \alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{nk_n} = \det \| A \|$.

Теорема доказана.

Замечание 6.2.1.

Утверждение теоремы 6.2.1. допускает следующую наглядную интерпретацию.

Выделим в матрице $\| A \|$ элементы, входящие в некоторое слагаемое определения 6.1.2., и соединим их отрезками прямых, как показано на рис. 6.2.1.

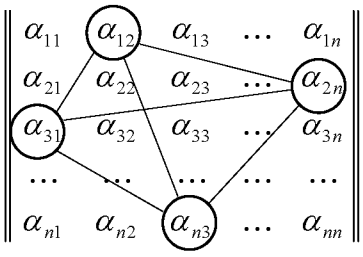

Рисунок 6.2.1.

Заметим, что пара элементов α_{ik_i} и α_{jk_j} дает беспорядок, если соединяющий их отрезок имеет "положительный" наклон, то есть правый конец отрезка расположен выше левого.

Очевидно, что при транспонировании квадратной матрицы число отрезков с "положительным" наклоном не меняется, поэтому не меняется и знак каждого слагаемого в формуле 6.1.2., и, следовательно, значение определителя.

Следствие 6.2.1.

Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, имеет место для ее строк, и наоборот.

Теорема 6.2.2.

При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.

Доказательство:

Рассмотрим вначале случай, когда переставляются *соседние* столбцы. Поскольку общий вид слагаемых в выражении для определителя дается формулой $(-1)^{E(k_1,k_2,\ldots,k_i,k_{i+1}\ldots,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{nk_n}$, то достаточно показать, что число беспорядков изменится при перестановке соседних столбцов на единицу.

Рассмотрим перестановку чисел $\{k_1,k_2,...k_i,k_{i+1},k_{i+2}...,k_n\}$. Если в ней поменять местами числа k_i и k_{i+1}, то число беспорядков, образуемых числами $\{k_1,k_2,...k_{i-1},k_{i+2},...,k_n\}$, останется прежним, а за счет изменения порядка следования чисел k_i и k_{i+1} общее число беспорядков изменится на единицу.

Это означает, что знак каждого слагаемого в формуле определителя изменится на противоположный и, следовательно, изменит знак и весь определитель.

Наконец, если требуется поменять местами столбцы, между которыми находится l столбцов, то для этого потребуется $l+l+1$ перестановок соседних столбцов, но поскольку $(-1)^{2l+1}=-1$, то знак определителя изменится на противоположный.

Теорема доказана.

Следствие 6.2.2. **Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Доказательство:

При перестановке одинаковых столбцов значение определителя, с одной стороны, не меняется, но, с другой стороны, это значение должно изменить знак. Поэтому данный определитель может равняться только нулю.

Следствие доказано.

Теорема 6.2.3. (Линейное свойство определителя) **Если k-ый столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц, k-ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из исходной линейной комбинации.**

Доказательство:

Пусть в матрице $\|A\|_\alpha$ k-й столбец состоит из элементов $\alpha_{ik}=\lambda\beta_{ik}+\mu\gamma_{ik}$, где $i=1,2,...,n$.

Очевидны равенства

$$(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,...,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}...\alpha_{ik}...\alpha_{nk_n}=$$

$$=(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,...,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}...(\lambda\beta_{ik}+\mu\gamma_{ik})...\alpha_{nk_n}=$$

$$=(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,...,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}...\lambda\beta_{ik}...\alpha_{nk_n}+(-1)^{\text{Б}(k_1,k_2,...,k_n)}\alpha_{1k_1}\alpha_{2k_2}...\mu\gamma_{ik}...\alpha_{nk_n}.$$

Или $\det\|A\|_\alpha = \lambda\det\|A\|_\beta + \mu\det\|A\|_\gamma$, где k-ые столбцы матриц $\|A\|_\beta$ и $\|A\|_\gamma$ соответственно состоят из элементов β_{ik} и γ_{ik}, i=1,2,...,n.

Теорема доказана.

Следствие 6.2.3. **При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.**

Следствие 6.2.4. **Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.**

Доказательство:

Действительно, определитель, получившийся в результате данной операции с матрицей, можно (по теореме 6.2.3.) представить в виде линейной комбинации исходного определителя и линейной комбинации определителей матриц, имеющих одинаковые столбцы. Последние равны нулю по следствию 6.2.2.

Следствие доказано.

Теорема 6.2.4. **Определитель произведения матриц размера nxn равен произведению их определителей, то есть** $\det(\|A\|\|B\|) = \det\|A\|\cdot\det\|B\|$ **.**

Доказательство:

1°. Обозначим $\|C\| = \|A\|\|B\|$. Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|C\|$ имеют, соответственно, элементы α_{ij}, β_{kl} и γ_{pq}. Тогда, по определению 5.1.1., $\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{pj}\beta_{jq}$ и потому

$$\det\|C\| = \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12}+\ldots+\alpha_{1n}\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{11}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12}+\ldots\alpha_{2n}\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{21}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\beta_{11}+\alpha_{n2}\beta_{21}+\ldots+\alpha_{nn}\beta_{n1} & \alpha_{n1}\beta_{12}+\ldots+\alpha_{nn}\beta_{n2} & \ldots & \alpha_{n1}\beta_{1n}+\ldots+\alpha_{nn}\beta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

По линейному свойству определителя (теорема 6.2.3.)

$$\det\|C\| = \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} \det \begin{Vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \ldots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \ldots & \alpha_{2i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \ldots & \alpha_{ni_n} \end{Vmatrix} =$$

$$= \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} \det\|A^*\|_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} .$$

Поскольку перестановки $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ могут содержать одинаковые числа, то общее число слагаемых в полученной сумме равно n^n, но ненулевых среди этих слагаемых в силу следствия 6.2.2. только $n!$.

2°. Заметим, что, поскольку матрицы $\|A^*\|_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}}$ составлены из тех же столбцов, что и $\|A\|$, но записанных в разном порядке, то их определители могут отличаться в силу теоремы 6.2.2. только знаком.

Перестроим каждую из матриц $\|A^*\|_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}}$, переставив ее столбцы так, чтобы каждый столбец с индексом i_k ; $k = [1,n]$ был расположен слева от столбцов с большими индексами. В итоге этой операции столбцы будут полностью упорядочены, для чего потребуется число перестановок столбцов, равное числу беспорядков в перестановке $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, и, следовательно, для каждой матрицы $\|A^*\|_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}}$ будет справедливо соотношение

$$\det\|A^*\|_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} = (-1)^{\text{Б}(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \det\|A\| .$$

3°. Подставляя это соотношение в выражение для $\det\|C\|$, получаем

$$\det\|C\| = \det\|A\| \sum_{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}} (-1)^{\text{Б}(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \beta_{i_1 1}\beta_{i_2 2}\ldots\beta_{i_n n} = \det\|A\| \cdot \det\|B\|^{\text{T}} ,$$

что по теореме 6.2.1. и дает

$$\det(\|A\|\|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\| .$$

Теорема доказана.

§6.3. Разложение определителей

Выберем в *квадратной* матрице $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Определение 6.3.1. Детерминант квадратной матрицы порядка k, образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором k-го порядка* и обозначается $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$.

Определение 6.3.2. Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$, называется *минором, дополнительным к минору* $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$, и обозначается $\overline{M}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij}. Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\|A^+\|$ размера $(n-1)\times(n-1)$.

Определение 6.3.3. Детерминант матрицы $\|A^+\|$ называется *дополнительным минором* $\overline{M}_i^j$ *элемента* α_{ij}.

Сгруппируем в определении 6.1.2. - детерминанта матрицы $\|A\|$ все $(n-1)!$ слагаемых, содержащих элемент α_{ij}, и вынесем его за скобки. Получим выражение вида $\det\|A\| = \alpha_{ij} D_{ij} + \ldots$.

Определение 6.3.4. Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением* элемента α_{ij}.

Заметим, что в силу определения 6.1.2. имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} D_{ij} \; ; \forall i = [1,n] \quad \text{и} \quad \det\|A\| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} D_{kj} \; ; \forall j = [1,n] \qquad (6.3.1.)$$

Теорема 6.3.1. **Справедливо соотношение** $D_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_i^j$.

Доказательство:

1°. По определению детерминанта 6.1.2.

$$\det\| A \| = \alpha_{11} \sum_{\{1,k_2,k_3,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(1,k_2,k_3,\ldots,k_n)} \alpha_{2k_2}\ldots\alpha_{nk_n} + \ldots \quad ,$$

то есть $D_{11} = \sum_{\{k_2,\ldots,k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_2,\ldots,k_n)} \alpha_{2k_2}\alpha_{3k_3}\ldots\alpha_{nk_n}$, поскольку очевидно, что $\text{Б}(1,k_2,k_3,\ldots,k_n) = \text{Б}(k_2,k_3,\ldots,k_n)$, но тогда выражение для D_{11} совпадает с формулой определителя матрицы, получаемой из $\| A \|$ вычеркиванием первого столбца и первой строки. Следовательно, $D_{11} = \overline{M}_1^1$.

2°. Построим новую матрицу $\| A' \|$, переместив элемент α_{ij} матрицы $\| A \|$ в ее левый верхний угол, для чего переставим *i*-ю строку на первое место, для чего потребуется $i-1$ перестановок, и переставим на первое место *j*-й столбец, что потребует $j-1$ перестановок. Тогда определитель перестроенной матрицы $\| A' \|$ равен

$$\det\| A' \| = (-1)^{i-1+j-1} \det\| A \| = (-1)^{i+j} \det\| A \| .$$

Из определения 6.1.2. следует, что данное соотношение будет также выполняться и для каждого из его слагаемых, а, значит, в силу формул (6.3.1.) и для каждого алгебраического дополнения D_{ij}. Поэтому справедливо равенство $D_{ij} = (-1)^{i+j} D'_{11}$.

3°. Наконец, очевидно, что значение дополнительного минора не зависит от положения вычеркиваемого элемента в матрице $\| A' \|$, и потому $\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1$.

4°. Учитывая полученные соотношения $\overline{M}_i^j = \overline{M'}_1^1 = D'_{11} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, приходим к равенству $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$.

Теорема доказана.

Следствие 6.3.1. **Разложение определителя по i-му столбцу имеет вид** $\det\| A \| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \overline{M}_k^i$ **или** $\det\| A \| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} M_k^i \overline{M}_k^i$.

Теорема 6.3.2. **Имеет место равенство** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} D_{is} = \delta_{js} \cdot \Delta$, **где** $\Delta = \det\| A \|$ **и** $\delta_{js} = \begin{cases} 1 , & j = s \\ 0 , & j \neq s \end{cases}$ **- символ Кронекера.**

Доказательство:

По определению 6.3.4. алгебраического дополнения имеем

$$\det\| A \| = \alpha_{1j} D_{1j} + \alpha_{2j} D_{2j} + ... + \alpha_{nj} D_{nj},$$

то есть утверждение теоремы для случая $j = s$ справедливо.

Пусть теперь $j \neq s$. Тогда выражение $\alpha_{1j} D_{1s} + \alpha_{2j} D_{2s} + ... + \alpha_{nj} D_{ns}$ можно рассматривать как разложение по s-му столбцу определителя матрицы, у которой s-й столбец совпадает с j-м столбцом. Но такой определитель равен нулю по следствию 6.2.2.

Теорема доказана.

Следствие 6.3.2. **Если квадратная матрица $\| A \|$ невырожденна, то элементами ее обратной матрицы $\| A \|^{-1}$ являются числа** $\beta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \overline{M}_j^i}{\Delta}; \; i, j = [1, n]$.

Доказательство:

Найдем произведение матриц $\| A \|$ и $\| B \|$, элементы которых α_{ij} и β_{ij} ; $i, j = [1, n]$. Пусть γ_{pq} - элемент произведения $\| A \|$ и $\| B \|$, тогда, согласно определению 5.1.1. и теореме 6.3.2.,

$$\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} \beta_{jq} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} \frac{(-1)^{j+q} \overline{M}_q^j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj} D_{qj} = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \delta_{pq} = \delta_{pq} \; ; \quad i, j = [1, n] \; .$$

Аналогичное соотношение получается и для произведения $\| B \| \| A \|$.

Таким образом, (по определению 1.1.4.) $\|A\|\|B\|=\|B\|\|A\|=\|E\|$, но тогда, согласно определению 5.1.2. и лемме 5.1.1., $\|B\|=\|A\|^{-1}$.

Следствие доказано.

Обозначим $I=i_1+i_2+\ldots+i_k$ и $J=j_1+j_2+\ldots+j_k$, тогда оказывается справедливой обобщающая следствие 6.3.1.

Теорема 6.3.3. (Лапласа) **Для фиксированного набора столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$ имеет место равенство** $\det\|A\|=\sum\limits_{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}(-1)^{I+J}M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}\overline{M}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$.

Отметим, что суммирование выполняется по всем возможным перестановкам номеров строк $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Задача 6.3.1. *Вычислить определитель матрицы n-го порядка*

$$\Delta_n=\det\begin{Vmatrix} x & a & a & \ldots & a \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{Vmatrix}$$

Решение:

1°. Заметим, что сумма элементов каждого столбца матрицы одинакова и равна $x+a(n-1)$. Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем (см. следствия 6.2.4. и 6.2.3.)

$$\Delta_n=(x+a(n-1))\cdot\det\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & x & a & \ldots & a \\ a & a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & a & \ldots & x \end{Vmatrix}.$$

2°. Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на a, получим

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{Vmatrix}.$$

3°. Последовательно применив $n-1$ раз следствие 6.3.1. для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

$$\Delta_n = (x + a(n-1))(x-a)^{n-1}.$$

§6.4. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j \;;\; j = [1,n] \qquad (6.4.1.)$$

Или же в матричной форме $\| A \| \| x \| = \| b \|$, где квадратная матрица $\| A \|$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\| x \|$ и $\| b \|$ - соответственно компоненты ξ_i и β_j.

Определение 6.4.1. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ будем называть *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема 6.4.1. (Правило Крамера) **Если $\Delta = \det \| A \| \neq 0$, то существует единственное решение системы линейных уравнений 6.4.1., определяемое формулами**

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta};\ i = 1,2,...,n \quad , \quad \text{где } \Delta_i = \det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_n & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

$\uparrow$

$i-$ й столбец

- определитель матрицы, получаемой из матрицы $\|A\|$, заменой ее i-го столбца на столбец свободных членов $\|b\|$.

Доказательство:

1°. Получим вначале утверждение теоремы в предположении, что система (6.4.1.) имеет решение $\|x\| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$, то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j \ ;\ j = [1,n].$$

Умножив последовательно для всех $j = [1,n]$ обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{jk} и просуммировав результаты умножения по j, получим

$$\sum_{j=1}^{n} D_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \xi_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} \ , \quad \forall k = [1,n] \quad .$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} D_{jk} \right) \xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} .$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{ik}$ (по теореме 6.3.2.), поэтому, учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{jk} = \Delta_k$ и $\Delta \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} \xi_i = \Delta \xi_k$, получаем $\Delta \xi_k = \Delta_k$, $k = [1,n]$.

Или, окончательно, $\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = [1,n]$.

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы набор чисел $\{\xi_i = \frac{\Delta_k}{\Delta}, i = [1,n]\}$ есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения ξ_i в левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1.).

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k D_{ki}\right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} D_{ki}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j \ , \quad j = [1,n].$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.

§6.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\| A \|$ размера $m \times n$. Пусть $1 \le k \le \min\{m,n\}$. Выберем k фиксированных столбцов и строк, на пересечении которых стоит матрица минора порядка k.

Пусть при данном k все миноры k-го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k, поскольку каждый минор $(k+1)$-го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k. (См. следствие 6.3.1.)

Определение 6.5.1. Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\| A \|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\mathrm{rg} \| A \|$.

Определение 6.5.2. Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Определение 6.5.3. Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Рассмотрим n m-компонентных столбцов вида:

$$\|a_1\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{Vmatrix};\ \|a_2\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{Vmatrix};\ \dots;\ \|a_n\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{Vmatrix}$$ и столбцы $$\|b\| = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{Vmatrix};\ \|o\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сложения и умножения на число, то можно говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\|b\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|a_i\|$.

Теорема 6.5.1. (О базисном миноре)

Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.

Доказательство:

1°. Пусть ранг матрицы равен r. Без ограничения общности можно считать, что матрица базисного минора расположена в левом верхнем углу матрицы $\|A\|$.

Окаймим матрицу базисного минора фрагментами i-й строки и j-го столбца и рассмотрим определитель построенной матрицы

$$\Delta = \det \left\| \begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ij} \end{array} \right\|,$$

который равен нулю как минор порядка $r+1$ в матрице ранга r.

2°. Разложив определитель Δ по последней строке, получим

$$\alpha_{i1}D_1 + \alpha_{i2}D_2 + \dots + \alpha_{ir}D_r + \alpha_{ij}M = 0,$$

где $M \neq 0$ - базисный минор, а $D_1, \dots, D_r$ - некоторые алгебраические дополнения, *не зависящие* от i. Следовательно, $\alpha_{ij} = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \dots + \lambda_r\alpha_{ir}$, где $\lambda_s = -\frac{D_s}{M}$, $s = [1, r]$ и $\forall i$.

Теорема доказана

Определение 6.5.4. Столбцы $\|a_1\|,\|a_2\|,\ldots,\|a_n\|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ такие, что $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\|a_i\|=\|o\|$, $(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|>0)$.

Лемма 6.5.1. **Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.**

Доказательство: Совпадает с доказательством леммы 1.4.1.

Лемма 6.5.2. **Если один из столбцов матрицы есть линейная комбинация некоторого подмножества остальных, то столбцы этой матрицы линейно зависимы.**

Доказательство:

По лемме 6.5.1. можно утверждать, что среди столбцов матрицы есть подмножество линейно зависимых. Допустим, что линейно зависимыми являются первые k столбцов, то есть для них существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу

$$\lambda_1\begin{Vmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \ldots\\ \alpha_{m1}\end{Vmatrix}+\lambda_2\begin{Vmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \ldots\\ \alpha_{m2}\end{Vmatrix}\ \ldots\ +\lambda_k\begin{Vmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \ldots\\ \alpha_{mk}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{Vmatrix}$$

Тогда очевидно, что нетривиальная линейная комбинация *всех* столбцов этой матрицы вида

$$\lambda_1\begin{Vmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \ldots\\ \alpha_{m1}\end{Vmatrix}+\lambda_2\begin{Vmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \ldots\\ \alpha_{m2}\end{Vmatrix}\ \ldots\ +\lambda_k\begin{Vmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \ldots\\ \alpha_{mk}\end{Vmatrix}+0\begin{Vmatrix}\alpha_{1,k+1}\\ \alpha_{2,k+1}\\ \ldots\\ \alpha_{m,k+1}\end{Vmatrix}+\ \ldots\ +0\begin{Vmatrix}\alpha_{1n}\\ \alpha_{2n}\\ \ldots\\ \alpha_{mn}\end{Vmatrix}$$

будет также равна нулевому столбцу.

Лемма доказана.

Теорема 6.5.2. **Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его столбцы (строки) были линейно зависимыми.**

Доказательство необходимости:

Пусть определитель равен нулю, тогда ранг его матрицы меньше n. По теореме о базисном миноре всякий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов и тогда по лемме 6.5.2. столбцы матрицы линейно зависимы.

Доказательство достаточности:

Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. По лемме 6.5.1. один из столбцов есть линейная комбинация остальных.

Пусть этот столбец последний, то есть $\| a_n \| = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \| a_i \|$. Умножим последовательно (для i=1, 2, ... , n-1) i-й столбец на число λ_i и сложим все их. Вычитание этой суммы из столбца $\| a_n \|$ не изменит величины определителя, но поскольку при этом мы получим нулевой столбец, то определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Теорема 6.5.3. (О ранге матрицы)

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк матрицы и равно рангу матрицы.

Доказательство:

1°. Если ранг матрицы нулевой, то все ее элементы нулевые и среди них нет линейно независимых.

Пусть ранг матрицы равен $r > 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из r базисных столбцов матрицы. Она имеет ненулевой минор r-го порядка и, следовательно, ее столбцы линейно независимы.

2°. Выберем $k > r$ столбцов матрицы и покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Построим из выбранных столбцов матрицу $\| A^* \|$. Ее ранг $R \le r$, поскольку $\| A^* \|$ является частью матрицы $\| A \|$. Следовательно, $R \le r < k$ и в матрице $\| A^* \|$ есть, по крайней мере, один небазисный столбец, и тогда столбцы матрицы $\| A \|$ линейно зависимы по лемме 6.5.2.

Теорема доказана.

§6.6. Системы m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}, \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j, \quad j = [1,m] \qquad (6.6.1.)$$

или же, в матричной форме $\|A\|\|x\| = \|b\|$, где матрица $\|A\|$ размера $m \times n$ имеет компоненты α_{ji}, а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ соответственно компоненты ξ_i, $i = [1,n]$, и β_j, $j = [1,m]$.

Определение 6.6.1. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (6.6.1.), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства. Частное решение системы линейных уравнений может также быть записано в виде столбца $\|x^0\| = \begin{Vmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \ldots \\ \xi_n^0 \end{Vmatrix}$. Совокупность *всех* частных решений системы линейных уравнений (6.6.1.) назовем *общим решением* системы (6.6.1.)

Определение 6.6.2. Если система (6.6.1.) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае - *несовместной* системой уравнений.

Определение 6.6.3. Матрица $\|A\| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}$ называется *основной* матрицей системы (6.6.1.), а матрица $\|A \mid b\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right\|$ - *расширенной* матрицей этой системы.

Определение 6.6.4. Система (6.6.1.) называется *однородной*, если $\beta_j = 0$, $\forall j = [1,m]$, в противном случае - *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 6.6.1. (Кронекера-Капелли)

Для того чтобы система (6.6.1.) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.

Доказательство необходимости:

Пусть существует решение системы (6.6.1.) $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$, тогда эту систему можно представить в виде следующего равенства

$$\xi_1\|a_1\|+\xi_2\|a_2\|+...+\xi_n\|a_n\|=\|b\|,$$

где $\|a_i\|=\|\alpha_{1i} \quad \alpha_{2i} \quad \cdots \quad \alpha_{mi}\|^{\mathrm{T}}, i=[1,n]$.

Поскольку в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов, образующих основную матрицу, то число линейно независимых столбцов основной и расширенной матриц будет одинаковым. Следовательно, по теореме 6.5.3. (о ранге матрицы) $\mathrm{rg}\|A\|=\mathrm{rg}\|A|b\|$.

Доказательство достаточности:

Пусть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен r. Без ограничения общности предположим, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы, но тогда по теореме 6.5.1. (о базисном миноре) имеет место равенство $\|b\|=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\|a_i\|$, которое можно переписать в виде

$$\|b\|=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\|a_i\|+\sum_{i=r+1}^{n}0\|a_i\|.$$

Однако последнее означает, что система (6.6.1.) имеет решение $\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r,0,...,0\}$, то есть она совместна.

Теорема доказана.

Задача 6.6.1.

Докажите справедливость следующего утверждения.

Для того чтобы прямые $A_ix+B_iy+C_i=0$, $i=[1,n]$ пересекались в одной и той же точке плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \dots & \dots \\ A_n & B_n \end{Vmatrix} = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{Vmatrix}.$$

§6.7. Фундаментальная система решений

В §6.6. было показано, что факт совместности или несовместности системы (6.6.1.) можно установить, сравнив ранги ее основной и расширенной матриц. Рассмотрим теперь случай, когда система (6.6.1.) совместна и найдем все ее решения.

При построении общего решения системы (6.6.1.) воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями:

Лемма 6.7.1. **Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (6.6.1.) также является ее частным решением.**

Доказательство:

Пусть $\|x^i\| = \begin{Vmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \dots \\ \xi_n^i \end{Vmatrix}$, $i=[1,k]$ - частные решения однородной системы, то есть, $\|A\|\|x^i\| = \|o\|$, $\forall i=[1,k]$. Рассмотрим столбец $\|y\| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x^i\|$. По правилам действий с матрицами для него справедливы равенства

$$\|A\|\|y\| = \|A\|(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x^i\|) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\|A\|\|x^i\|) = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7.2. **Сумма некоторого частного решения однородной системы (6.6.1.) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (6.6.1.).**

Доказательство:

Пусть $\|x\|$ - частное решение однородной системы, а $\|y\|$ - некоторое частное решение неоднородной, то есть $\|A\|\|x\| = \|o\|$, $\|A\|\|y\| = \|b\|$. Тогда, по правилам действий с матрицами, справедливы равенства

$$\|A\|(\|x\| + \|y\|) = \|A\|\|x\| + \|A\|\|y\| = \|o\| + \|b\| = \|b\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7.3. **Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (6.6.1.) является частным решением однородной системы (6.6.1.).**

Доказательство:

Пусть $\|x\|$ и $\|y\|$ - частные решения неоднородной системы, то есть, $\|A\|\|x\| = \|b\|$, $\|A\|\|y\| = \|b\|$. Тогда, по правилам действий с матрицами, справедливы равенства

$$\|A\|(\|x\| - \|y\|) = \|A\|\|x\| - \|A\|\|y\| = \|b\| - \|b\| = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Замечания: 1°. Из лемм 6.7.1. - 6.7.3. следует, что:

общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,

и поэтому представляется целесообразным вначале изучить вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

2°. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*.

3°. Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде столбцов, то, используя операции сравнения, сложения и умножения на число для столбцов, а также лемму 6.7.1., можно ввести понятие линейной зависимости решений аналогично определению 6.5.4.

Теорема 6.7.1. **Однородная система (6.6.1.) имеет $n - \mathrm{rg}\|A\|$ линейно независимых частных решений.**

Доказательство:

1°. Рассмотрим вначале совместную неоднородную систему (6.6.1.)

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}$$

и предположим, что матрица базисного минора расширенной матрицы $\|A|b\|$, имеющей ранг $r \le \min\{n,m\}$, расположена в левом верхнем углу последней.

По теореме 6.5.1. (о базисном миноре) последние $m-r$ уравнений являются линейными комбинациями первых r уравнений и, следовательно, их можно отбросить, поскольку они будут тождественно удовлетворяться решениями первых r уравнений. В оставшихся уравнениях перенесем в правые части слагаемые, содержащие неизвестные $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \ldots, \xi_n$.

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r = \beta_1 - \alpha_{1r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}\xi_n \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2r}\xi_r = \beta_2 - \alpha_{2r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{2n}\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}\xi_1 + \alpha_{r2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{r,n}\xi_n \end{cases}.$$

Неизвестные $\xi_1, \ldots, \xi_r$ называются *основными* (*главными, зависимыми*), а неизвестные $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ - *свободными* (*параметрическими, независимыми*). Присвоим свободным неизвестным некоторые конкретные значения $\xi_{r+1} = \mu_1, \ldots, \xi_n = \mu_{n-r}$ и рассчитаем по правилу Крамера (теорема 6.4.1.) соответствующие им значения основных неизвестных

$$\xi_j = \frac{1}{M}\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \beta_1 - \sum_{k=1}^{n-r}\alpha_{1,r+k}\mu_k & \ldots & \alpha_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{r1} & \ldots & \beta_r - \sum_{k=1}^{n-r}\alpha_{r,r+k}\mu_k & \ldots & \alpha_{rr} \end{Vmatrix}, \qquad (6.7.1.)$$

(j-й столбец ↓)

где $j = [1,r]$, а M - базисный минор.

2°. Заметим, что из соотношений (6.7.1.), положив $\mu_k = 0$; $k = [1, n-r]$, можно найти частное решение неоднородной системы (6.6.1.). Теперь рассмотрим однородную систему. По линейному свойству определителей (теорема 6.2.3.) получаем выражения для значений неизвестных

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n-r} \kappa_{jk}\mu_k,\ j = [1,r];\ \xi_{r+i} = \mu_i,\ i = [1, n-r], \qquad (6.7.2.)$$

где

$$\kappa_{jk} = \frac{1}{M}\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1,r+k} & \dots & \alpha_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & -\alpha_{r,r+k} & \dots & \alpha_{rr} \end{Vmatrix},\ j = [1,r],\ k = [1, n-r].$$

$\uparrow$

j -й столбец

Наконец, в матричной форме соотношения (6.7.2.) могут быть записаны в виде

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_{n-r} \end{Vmatrix} \text{ или } \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \cdots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \cdots & \kappa_{2,n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \cdots & \kappa_{r,n-r} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$$

(6.7.3.)

3°. Полагая $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$, получим решение $\{\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_r^1, 1, 0, \dots, 0\}$. Аналогично при $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$ найдем решение $\{\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_r^2, 0, 1, \dots, 0\}$. И, продолжая этот процесс, получим на последнем шаге при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r-1} = 0,\ \mu_{n-r} = 1$ решение $\{\xi_1^{n-r}, \xi_2^{n-r}, \dots, \xi_r^{n-r}, 0, 0, \dots, 1\}$.

Совокупность полученных решений будем называть *нормальной фундаментальной системой решений.*

4°. Покажем теперь, что построенные *n-r* частных решений однородной системы уравнений (6.6.1.) являются линейно независимыми. Действительно, записав эти решения как строки, получим матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\| \qquad (6.7.4.).$$

Заметим, что ее ранг, с одной стороны, не меньше, чем $n-r$, поскольку содержит ненулевой минор этого порядка, но, с другой стороны, не больше, чем число строк в этой матрице, равное $n-r$, и потому ранг в точности равен $n-r$, что доказывает линейную независимость построенных частных решений.

Теорема доказана.

Определение 6.7.1. *Фундаментальной системой решений* для системы линейных уравнений (6.6.1.) называется совокупность любых $n-\mathrm{rg}\|A\|$ частных, линейно независимых решений однородной системы (6.6.1.), где n - число неизвестных в системе (6.6.1.), а $\|A\|$ - ее основная матрица. Матрица (6.7.4.) называется *фундаментальной*.

Теорема 6.7.2. **Каждое частное решение однородной системы (6.6.1.) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.**

Доказательство:

Пусть дано решение $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ однородной системы (6.6.1.) Рассмотрим матрицу размера $(n-r+1)\times n$

$$\left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & \xi_{r+1} & \xi_{r+2} & \dots & \xi_n \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|, \qquad (6.7.5.)$$

ранг которой, с одной стороны, очевидно, не меньше, чем $n-r$.

С другой стороны, первые r столбцов этой матрицы являются линейными комбинациями (заданными соотношениями (6.7.3.)) последних $n-r$ столбцов. Действительно, эти соотношения, связывающие значения свободных и основных переменных, *одни и те же для всех строк* матрицы (6.7.5.), и потому в этой матрице каждый из первых r столбцов есть линейная комбинация последних $n-r$.

Откуда заключаем, что ранг матрицы не превосходит $n-r$, и, следовательно, равен в точности $n-r$. Но тогда по теореме 6.5.1. - о базисном миноре, который располагается в последних r строках, первая строка матрицы (6.7.5.) является некоторой линейной комбинацией остальных, и, следовательно, общее решение однородной системы (6.6.1.) может быть записано в виде

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{Vmatrix} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Vmatrix},$$

где λ_i, $\forall i = [1, n-r]$ - произвольные константы.

Теорема доказана.

Следствие 6.7.1.

Общее решение неоднородной системы (6.6.1.) может быть дано формулой

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{Vmatrix} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_r^0 \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{Vmatrix}, \quad \textbf{где} \quad \begin{Vmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_r^0 \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{Vmatrix}$$

является некоторым частным решением неоднородной системы (6.6.1.), а числа λ_i, $\forall i = [1, n-r]$ - произвольные константы.

Доказательство:

Пусть $\| x^0 \|$ - некоторое (найденное, например, подбором) частное решение неоднородной системы (6.6.1.), а $\| x \|$ - ее произвольное решение. Тогда по лемме 6.6.3.

произвольное решение однородной системы (6.6.1.) $\|y\|$ представимо в виде $\|y\| = \|x\| - \|x^0\|$. Откуда получаем $\|x\| = \|y\| + \|x^0\|$.

Следствие доказано.

Из теорем 6.7.1. и 6.7.2. непосредственно вытекает

Следствие 6.7.2. **Для того чтобы однородная система (6.6.1.) с $n < m$ имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы удовлетворял условию $\operatorname{rg}\|A\| < n$.**

В частном случае, когда основная матрица системы (6.6.1.) квадратная, условие существования нетривиального решения равносильно равенству $\det\|A\| = 0$.

Иное, полезное для приложений, условие совместности системы линейных уравнений дает

Теорема 6.7.3. (Фредгольма) **Для того чтобы система (6.6.1.) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение $\|y\| = \|\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_m\|^{\mathrm{T}}$ *сопряженной* системы**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \ldots + \alpha_{m1}\eta_m = 0 \\ \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \ldots + \alpha_{m2}\eta_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + \alpha_{2n}\eta_2 + \ldots + \alpha_{mn}\eta_m = 0 \end{cases}$$

(или, в матричном виде, $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\|$) удовлетворяло условию $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \eta_i = 0$ (или, в матричном виде $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\| = 0$).

Доказательство необходимости:

Пусть система уравнений (6.6.1.) совместна, то есть для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\| = \|A\|\|x\|$. Найдем произведение $\|b\|^{\mathrm{T}}\|y\|$ в предположении, что $\|A\|^{\mathrm{T}}\|y\| = \|o\|$. Имеем

$$\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = (\| A \| \| x \|)^{\mathrm{T}} \| y \| = \| x \|^{\mathrm{T}} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| x \|^{\mathrm{T}} \| o \| = 0 .$$

Доказательство достаточности:

Пусть $\| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0$ для *любого* решения системы линейных уравнений $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$ и $\begin{cases} \| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \| \\ \| b \|^{\mathrm{T}} \| y \| = 0 \end{cases}$ совпадают, и для этих систем число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно теореме 6.7.1.

$$m - \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = m - \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}} \quad \text{или} \quad \mathrm{rg} \| A \|^{\mathrm{T}} = \mathrm{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^{\mathrm{T}},$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\mathrm{rg} \| A \| = \mathrm{rg} \| A | b \|$, означающее в силу теоремы 6.6.1. совместность системы линейных уравнений $\| A \| \| x \| = \| b \|$.

Теорема доказана.

Альтернативное доказательство этой теоремы приведено в разделе “Евклидово пространство” (см. теоремы 10.6.4. и 10.6.5.)

§6.8. Метод Гаусса

Практическое применение теорем 6.7.3. и 6.7.4. затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Определение же рангов основной и расширенной матриц независимо от поиска решений оказывается весьма нерациональной (с точки зрения расходования вычислительных ресурсов) процедурой.

Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (6.6.1.), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в приведении расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под "наиболее простым" видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным. Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n\,(n > m)$, имеющей верхнюю треугольную форму.

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);
- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ее ранг) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида:

- перестановка строк с номерами i и j матрицы $\|A\|$ размера $m \times n$ осуществляется путем ее умножения слева на матрицу $\|S\|_1$ размера $m \times m$, которая, в свою очередь, получается из единичной матрицы $\|E\|$ путем перестановки в последней i-й и j-й строк.

- умножение *i*-й строки матрицы $\|A\|$ на некоторое число $\lambda \neq 0$ осуществляется путем умножения $\|A\|$ слева на матрицу $\|S\|_2$, которая, получается из единичной, размера *m*×*m* , матрицы $\|E\|$ путем замены в последней *i*-го диагонального элемента (равного единице) на λ.
- сложение строк с номерами *i* и *j* матрицы $\|A\|$ осуществляется путем ее умножения слева на матрицу $\|S\|_3$ размера *m*×*m* , которая, получается из единичной матрицы $\|E\|$ путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в *i*-й строке и *j*-м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте *i*-й строки исходной матрицы $\|A\|$.)

В дальнейшем (см. теорему 8.4.3.) будет показано, что если матрица $\|S\|$ квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы $\|S\|$ на матрицу $\|A\|$, то справедливо равенство $\mathrm{rg}(\|S\|\|A\|) = \mathrm{rg}\|A\|$. Поскольку $\det\|S\|_1 = -1$, $\det\|S\|_2 = \lambda \neq 0$ и $\det\|S\|_3 = 1$, то ранг $\|A\|$ при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

Проверьте самостоятельно, что будут также справедливы

Теорема 6.8.1. **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся произведением матриц данных элементарных преобразований.**

Теорема 6.8.2. **Если умножение матрицы $\|A\|$ слева на квадратную матрицу $\|S\|$, реализующую некоторое преобразование над строками $\|A\|$, то умножение $\|A\|$ справа на $\|S\|^{\mathrm{T}}$ реализует то же самое преобразование матрицы $\|A\|$, но выполненное над ее столбцами.**

Отмеченные свойства элементарных преобразований позволяют в ряде случаев упрощать вычислительные процедуры с матричными выражениями. Пусть, например, $\|S\|^*$ есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу $\|A\|$ в единичную. Тогда преобразование с матрицей $\|S\|^*$ переведет единичную матрицу $\|E\|$ в матрицу $\|A\|^{-1}$, поскольку в силу $\|E\| = \|S\|^*\|A\|$ и невырожденности $\|A\|$ справедливы равенства

$$\|E\|\|A\|^{-1} = \|S\|^*\|A\|\|A\|^{-1} \text{ или } \|A\|^{-1} = \|S\|^*\|E\|.$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц $\|A\|^{-1}\|B\|$ может быть сведено к последовательности элементарных преобразований строк матрицы $\|A|B\|$ (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы $\|B\|$ к матрице $\|A\|$), приводящих подматрицу $\|A\|$ к единичной. В результате такой процедуры искомое произведение оказывается на месте подматрицы $\|B\|$.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса на примере решения следующей системы линейных уравнений.

Задача 6.8.1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2 \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23 \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12 \end{cases}$$

Решение:

1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right\|.$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого:

а) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на -3 , и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами -5 и 1 соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array} \right\|;$$

б) выполняем теперь операцию зануления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую - разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|;$$

в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.

3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Потому заключаем, что

а) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме 6.6.1., Кронекера-Капелли);

б) однородная система уравнений будет иметь по теореме 6.7.1. $n - \operatorname{rg}\| A \| = 5 - 2 = 3$ линейно независимых решения.

4°. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое - за свободные.

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 \\ \quad\ \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases} \qquad (6.8.1.)$$

Второе уравнение для удобства вычислений умножим на -1, а третье и четвертое уравнения отбросим как удовлетворяющиеся тождественно.

Положив в системе (6.8.1.) свободные неизвестные равными нулю, находим частное решение неоднородной системы $\begin{Vmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Значения основных неизвестных определяются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 \\ \quad\ \xi_2 = 23 \end{cases}.$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 \\ \quad\ \xi_2 = - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим нормальную фундаментальную систему решений по схеме, использованной при доказательстве теоремы 6.7.1. Первое независимое решение $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1 \\ \xi_2 = -2 \end{cases}.$$

Аналогично получаются второе и третье решения: $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_3 \begin{Vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Замечание: поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.