Раздел 8
ЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§8.1. Линейные операторы

Определение 8.1.1.

Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^*. Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^*, обозначаемый $y = \hat{A}x$.

При этом элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x - *прообразом элемента* y.

Как и в §5.2., операторы подразделяются на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subset \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$. В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, то есть, мы будем рассматривать преобразования, действующие в Λ.

Определение 8.1.2.

Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства:

$$1^\circ.\ \hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 \text{ и}$$

$$2^\circ.\ \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x.$$

Пример 8.1.1.

1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix},$$

связывающее вектор-прообраз $x = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ с вектором-образом $y = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Vmatrix}$.

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве многочленов $P_n(\tau)$ линейным оператором является операция умножения многочлена на независимую переменную τ.

Задача 8.1.1. *Доказать, что операторы в примерах* 1°, 2° *и* 3° *являются линейными.*

Задача 8.1.2. *Является ли линейным оператор* $\hat{A}$ *, ставящий каждому элементу* $x \in \Lambda$ *в соответствие фиксированный элемент* $a \in \Lambda$?

Решение: Если $a = o$, то $\hat{A}$ - линейный оператор, действующий в Λ.

§8.2. Действия с линейными операторами

Определение 8.2.1. Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными*, если $\forall x \in \Lambda$: $\hat{A}x = \hat{B}x$. Равенство операторов обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$.

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A} + \hat{B}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма 8.2.1. **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Доказательство:

Пусть $x, y \in \Lambda$ и λ ; μ - числа, а $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, тогда

$$\begin{aligned}\hat{C}(\lambda x + \mu y) &= \hat{A}(\lambda x + \mu y) + \hat{B}(\lambda x + \mu y) = \\ &= \lambda \hat{A}x + \mu \hat{A}y + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{B}y = \\ &= \lambda(\hat{A}x + \hat{B}x) + \mu(\hat{A}y + \hat{B}y) = \lambda \hat{C}x + \mu \hat{C}y.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 8.2.2. *Нулевым* оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение 8.2.3. Оператором, *противоположным* оператору $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $-(\hat{A}x)$.

Заметим, что нулевой и противоположный операторы являются линейными.

Легко проверяются следующие равенства для линейных операторов:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A};$$
$$(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C});$$
$$\hat{A} + \hat{O} = \hat{A} \quad ; \quad \hat{A} + (-\hat{A}) = \hat{O} \quad .$$

Определение 8.2.4. *Произведением* линейного оператора $\hat{A}$ на число λ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма 8.2.2. **Произведение линейного оператора на число является линейным оператором, для которого выполняются соотношения**

$$\alpha(\beta\hat{A}) = (\alpha\beta)\hat{A}\,;\ 1\hat{A} = \hat{A}\,;$$
$$(\alpha + \beta)\hat{A} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}\,;$$
$$\alpha(\hat{A} + \hat{B}) = \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}\,.$$

Доказательство:

Утверждение леммы проверяется непосредственно. Например, для третьего равенства имеем $\forall x \in \Lambda$: $(\alpha + \beta)\hat{A}x = \hat{A}((\alpha + \beta)x) = \hat{A}(\alpha x + \beta x) = \alpha\hat{A}x + \beta\hat{A}x$.

Теорема 8.2.1. **Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является линейным пространством.**

Доказательство:

Следует из определений 7.1.1., 8.2.1.-8.2.4. и лемм 8.2.1., 8.2.2.

Определение 8.2.5. *Произведением* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\,\hat{B}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема 8.2.2. **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} \quad ;$$
$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} \quad ;$$
$$(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} \quad .$$

Доказательство:

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов.

Действительно

$$\hat{A}\hat{B}(\alpha\, x + \beta\, y) = \hat{A}(\alpha\, \hat{B}x + \beta\, \hat{B}y) = \alpha\, \hat{A}(\hat{B}x) + \beta\, \hat{A}(\hat{B}y) = \alpha\,(\hat{A}\hat{B})x + \beta(\hat{A}\hat{B})y\,.$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$(\hat{A}(\hat{B}\hat{C}))x = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x))\,,$$

но, с другой стороны,

$$((\hat{A}\,\hat{B})\hat{C})x = \hat{A}\hat{B}(\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x))\,,$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание: в общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть, $\hat{A}\,\hat{B} \neq \hat{B}\,\hat{A}$.

Определение 8.2.6. Оператор $\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть нулевой оператор.

Задача 8.2.1.

В линейном пространстве алгебраических многочленов $P_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k$ *найти коммутатор для операторов*: $\hat{A}$, *ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и* $\hat{B}$ *- оператора умножения многочлена на независимую переменную.*

Решение:

Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем:

$$\hat{A}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\tau^{k-1}$$

$$\hat{B}P_n(\tau)=\tau(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}\quad .$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau))=\tau(\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\tau^{k-1})=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\tau^k=\sum_{k=0}^{n}k\alpha_k\tau^k$$

$$\hat{A}(\hat{B}P_n(\tau))=\frac{d}{d\tau}(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1})=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k$$

и окончательно

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau)=(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k)-(\sum_{k=0}^{n}k\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=P_n(\tau).$$

Следовательно, данные линейные операторы не коммутируют.

В рассмотренной выше задаче 8.2.1. оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование:

Определение 8.2.7.

Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу линейного пространства $\forall x\in\Lambda$ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть $\hat{E}x=x$; $\forall x\in\Lambda$.

Докажите самостоятельно справедливость соотношений: $\hat{A}\hat{E}=\hat{E}\hat{A}=\hat{A}$, $\forall\hat{A}$, а также линейность и единственность оператора $\hat{E}$.

Определение 8.2.8. Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* оператору $\hat{A}$ и обозначается $\hat{A}^{-1}$, если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Пример 8.2.1. В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha, \beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha) = 0$; $k = 0,1,2,\ldots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \dfrac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma$ - оператор интегрирования с переменным верхним пределом, являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\alpha}^{\tau} f(\sigma)d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \qquad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}f = \int\limits_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\sigma}d\sigma = f(\tau) - f(a) = f(\tau) = \hat{E}f .$$

Замечания:

1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = o$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{B}$ имеет место $(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o$, $\forall x \in \Lambda$, и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{B}$.

2°. Обратный оператор, если существует, то единственен. (Покажите это самостоятельно, использовав как аналог доказательство леммы 5.1.1.)

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$, что имеет, например, место в пространстве многочленов $P_n(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^k$ ставит в соответствие многочлен $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \tau^{k-1}$.

§8.3. Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$ с областью значений в Λ^n. В §7.2. показано, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$. Следовательно, также существует и единственное разложение элемента $\hat{A}x = \hat{A}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i$, найти которое можно, разложив, в свою очередь, по данному базису элементы $\hat{A} g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k$, $\forall i = [1, n]$.

Определение 8.3.1. Матрица, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A} g_i$,

$$\| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \in \Lambda^n$.

Отметим, что такую матрицу можно поставить в соответствие, и притом единственным образом, каждому линейному оператору в Λ^n.

При помощи матрицы линейного оператора можно находить координаты образов элементов линейного пространства.

Пусть координатное разложение образа элемента x имеет вид: $\hat{A}x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k$. С другой стороны, $\hat{A}x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A} g_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ki} \xi_i) g_k$. Сравнивая оба полученных представления для $\hat{A}x$ и используя линейную независимость элементов $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, приходим к выражению $\eta_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i$, $\forall k = [1, n]$. В матричной форме полученные соотношения (в силу очевидного $\eta_{k1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_{i1}$, $\forall k = [1, n]$) имеют вид:

$$\begin{Vmatrix} \hat{A}g_1 \\ \hat{A}g_2 \\ \dots \\ \hat{A}g_n \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \|_g^{\mathrm{T}} \begin{Vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{Vmatrix}; \quad \| y \|_g = \| \hat{A} \|_g \| x \|_g \qquad (8.3.1.)$$

где $\| x \|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$; $\| y \|_g = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix}$ - координатные представления элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Полученный результат можно выразить следующим образом:

Теорема 8.3.1. **Между множеством всех линейных операторов, заданных в линейном пространстве Λ^n, и множеством всех матриц размера $n \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.**

Доказательство:

Выше было показано, что каждому линейному оператору в Λ^n можно сопоставить матрицу размера $n \times n$.

С другой стороны, соотношение $\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ может быть принято за определение некоторого оператора, и для завершения доказательства достаточно заметить, что линейность этого оператора следует из правил операций с матрицами.

Теорема доказана.

Пример 8.3.1. 1°. В трехмерном векторном пространстве с ортонормированным базисом рассмотрим линейный оператор, ортогонально проектирующий радиус-векторы на плоскость Oxy. Поскольку в данном случае

$$\begin{aligned} \hat{A}\vec{g}_1 &= 1\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \\ \hat{A}\vec{g}_2 &= 0\vec{g}_1 + 1\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \\ \hat{A}\vec{g}_3 &= 0\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \end{aligned}, \text{ то } \| \hat{A} \|_g = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Действия с линейными операторами в матричной форме

Введенные в §1.1. и §5.1. операции с матрицами позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. Сравнение операторов: $\hat{A} = \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g$.

Согласно определению 8.2.1. условие $\hat{A} = \hat{B}$ означает, что $\forall x \in \Lambda^n$: $\hat{A}x = \hat{B}x$, или, в координатной форме, $\left\| \hat{A} \right\|_g \| x \|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g \| x \|_g$; $\forall x \in \Lambda^n$. Но тогда, по лемме 5.1.2., матрица $\left\| \hat{A} \right\|_g - \left\| \hat{B} \right\|_g$ нулевая и, следовательно, условие $\hat{A} = \hat{B}$ равносильно $\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{B} \right\|_g$.

2°. Сложение операторов: $\left\| \hat{A} + \hat{B} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g + \left\| \hat{B} \right\|_g$.

Действительно, из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k$ и $\hat{B}g_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k$ следует, что

$$(\hat{A} + \hat{B})g_i = \hat{A}g_i + \hat{B}g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ki} + \beta_{ki}) g_k .$$

3°. Умножение оператора на число: $\left\| \lambda \hat{A} \right\|_g = \lambda \left\| \hat{A} \right\|_g$.

Из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} g_k$ для любого числа λ находим, что

$$(\lambda \hat{A})g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_{ki}) g_k .$$

4°. Произведение операторов: $\left\| \hat{A}\hat{B} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \hat{B} \right\|_g$.

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$(\hat{A}\hat{B})g_i = \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A}(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} g_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \hat{A} g_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} g_j = \sum_{j=1}^{n} \kappa_{ji} g_j ,$$

где $\kappa_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \beta_{ki}$, что совпадает с определением произведения матриц 5.1.1.

5°. Обращение операторов: $\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g^{-1}$.

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 8.2.8. следует, что $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\,\hat{A}^{-1} = \hat{E}$, принимая во внимание результат пункта 3°, получаем, что искомое матричное представление $\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g$ оператора $\hat{A}^{-1}$ должно удовлетворять соотношениям $\left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g \left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \hat{A}^{-1} \right\|_g = \left\| \hat{E} \right\|_g$, то есть являться обратной матрицей к матрице $\left\| \hat{A} \right\|_g$.

Следствие 8.3.1. **Размерность линейного пространства линейных операторов, действующих в Λ^n, равна n^2.**

Доказательство:

Из теоремы 8.3.1. и правил действий с линейными операторами в матричной форме следует изоморфизм линейного пространства линейных операторов и линейного пространства всех матриц размера *n*x*n*. Но тогда, по теореме 7.5.1. (об изоморфизме), их размерности равны.

Следствие доказано.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется матрица линейного оператора при замене базиса. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\| S \| = \| \sigma_{ji} \|$, то есть $g'_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i$ для всех $j = [1, n]$. Тогда справедлива

Теорема 8.3.2. **Матрица линейного оператора $\left\| \hat{A} \right\|_{g'}$ в базисе $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ связана с матрицей этого же оператора $\left\| \hat{A} \right\|_g$ в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ соотношением $\left\| \hat{A} \right\|_{g'} = \| S \|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \| S \|$.**

Доказательство:

По теореме 7.3.1. при переходе от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ компоненты элемента-прообраза оператора $\hat{A}$ в этих базисах связаны равенством

$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \| S \| \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{Vmatrix}$, а компоненты образа - $\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix} = \| S \| \begin{Vmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{Vmatrix}$.

В рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотношениями $\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \|_g \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{Vmatrix} = \| \hat{A} \|_{g'} \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{Vmatrix}$, но поскольку матрица перехода имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\begin{Vmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{Vmatrix} = \| S \|^{-1} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{Vmatrix}.$$

Наконец, приходим к равенству $(\| \hat{A} \|_{g'} - \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) \begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}$, из которого, в силу произвольности столбца $\begin{Vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{Vmatrix}$ и леммы 5.1.2., следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 8.3.2. **Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.**

Доказательство:

Из утверждения теоремы 8.3.2. следует $\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|)$, но поскольку

$$\det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = (\det \| S \|^{-1})(\det \| \hat{A} \|_g)(\det \| S \|) \text{ и } \det \| S \|^{-1} = \frac{1}{\det \| S \|},$$

а $\det(\|S\|^{-1}\|S\|) = \det\|S\|^{-1}\det\|S\| = \det\|E\| = 1$, то окончательно получаем, что $\det\|\hat{A}\|_{g'} = \det\|\hat{A}\|_g$.

Следствие доказано.

Отметим, наконец, что в силу теоремы 8.3.2. в любом базисе нулевой оператор будет иметь нулевую матрицу, а единичный оператор - единичную.

§8.4. Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве, как некоторое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора* $\hat{A}$ будем понимать множество образов *всех* элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$. В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ.

Ответ на вопрос "*Что представляет собой область значений линейного оператора*?" дает

Теорема 8.4.1. **Пусть $\hat{A}$ - линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ. Тогда**

1°. Множество элементов $\hat{A}x$, $\forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ.

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, то размерность этого подпространства равна $\mathrm{rg}\|\hat{A}\|_g$.

Доказательство:

Пусть Λ^* есть множество элементов вида $\hat{A}x$ и пусть $y_1, y_2 \in \Lambda^*$. Тогда существуют $x_1 \in \Lambda$ и $x_2 \in \Lambda$ такие, что $\hat{A}x_1 = y_1$ и $\hat{A}x_2 = y_2$. По свойству линейности оператора $\hat{A}$ имеем: $y_1 + y_2 = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 = \hat{A}(x_1 + x_2) \in \Lambda^*$. Аналогично $\lambda y = \lambda\hat{A}x = \hat{A}(\lambda x) \in \Lambda^*$ и потому Λ^* есть подпространство Λ.

Пусть теперь $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Поскольку каждый элемент $x \in \Lambda$ есть линейная комбинация базисных элементов, то, соответственно, в силу

линейности каждый элемент из области значений $\hat{A}$ есть та же линейная комбинация элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n$, то есть Λ^* есть линейная оболочка множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n\}$.

Выделим из множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n\}$ максимальное подмножество линейно независимых элементов, и пусть число их оказалось равным k. Тогда, применяя теорему 7.4.1., приходим к заключению, что размерность Λ^* есть k, а из теоремы 7.5.2. следует, что и $\mathrm{rg}\left\| \hat{A} \right\|_g = k$.

Теорема доказана.

Определение 8.4.1. *Рангом* линейного оператора $\hat{A}$ в Λ^n называется размерность его области значений.

Ранг линейного оператора линейного оператора $\hat{A}$ обозначается как $\mathrm{rg}\,\hat{A}$.

Следствие 8.4.1. $\mathrm{rg}\,\hat{A} = \mathrm{rg}\left\| \hat{A} \right\|_g \le n$ **и не зависит от выбора базиса.**

Следствие 8.4.2. **Размерность области значений линейного оператора $\hat{A}$, действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.**

Доказательство:

Поскольку подпространство Λ^* является линейным пространством, то к нему применима теорема 8.4.1.

Следствие доказано.

Теорема 8.4.2. **Ранг произведения линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не превосходит ранга каждого из этих операторов.**

Доказательство:

Рассмотрим область значений линейного оператора $\hat{A}\hat{B}$. По следствию 8.4.2. это подпространство имеет размерность не большую, чем размерность области значений оператора $\hat{B}$.

С другой стороны, область значений оператора $\hat{A}\hat{B}$ содержится в области значений оператора $\hat{A}$ и, следовательно, размерность области значений $\hat{A}\hat{B}$ не превосходит размерности области значений $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Теорема 8.4.3. **Если квадратная матрица $\|A\|$ невырожденная, то для любой квадратной матрицы $\|B\|$ того же размера**

$$\mathrm{rg}(\|A\|\|B\|) = \mathrm{rg}(\|B\|\|A\|) = \mathrm{rg}\|B\|.$$

Доказательство:

Будем рассматривать матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ как координатные представления линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в некотором базисе.

Если $\det\|A\| \neq 0$, то существует $\|A\|^{-1}$ и в силу теоремы 8.4.2. имеем, с одной стороны, $\mathrm{rg}(\|A\|\|B\|) \leq \mathrm{rg}\|B\|$, но с другой

$$\mathrm{rg}\|B\| = \mathrm{rg}(\|A\|^{-1}\|A\|\|B\|) \leq \mathrm{rg}(\|A\|\|B\|).$$

Теорема доказана.

Замечания:

1°. Если матрица $\|B\|$ не квадратная, но существует одно из произведений $\|A\|\|B\|$ или $\|B\|\|A\|$, то при $\det\|A\| \neq 0$ также верны равенства $\mathrm{rg}(\|A\|\|B\|) = \mathrm{rg}\|B\|$ или, соответственно, $\mathrm{rg}(\|B\|\|A\|) = \mathrm{rg}\|B\|$. В этом можно убедиться, заменив матрицу $\|B\|$ матрицей $\|B\|^*$, являющейся дополнением нулевыми столбцами или нулевыми строками $\|B\|$ до квадратной так, чтобы существовали $\|A\|\|B\|^*$ или $\|B\|^*\|A\|$, ибо очевидно, что $\mathrm{rg}\|B\|^* = \mathrm{rg}\|B\|$.

2°. Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ, называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker \hat{A}$.

Определение 8.4.2. *Ядро* линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x \in \Lambda$ таких, что $\hat{A}x = o$.

Теорема 8.4.4. **Если** $\Lambda = \Lambda^n$ **и** $\operatorname{rg} \hat{A} = r$, **то** $\ker \hat{A}$ **есть подпространство и** $\dim(\ker \hat{A}) = n - r$.

Доказательство:

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для $\ker \hat{A}$ выполняются условия определения 7.4.1.

Пусть в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\| \hat{A} \|_g = \| \alpha_{ij} \|$. По следствию 8.4.1. $\operatorname{rg} \| \hat{A} \|_g = r$ для любого базиса. Тогда в координатной форме условие принадлежности некоторого элемента $x \in \Lambda^n$ с $\| x \|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ ядру оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j = 0; \quad i = [1, n].$$

С другой стороны, поскольку каждое решение однородной системы линейных уравнений $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j = 0$; $i = [1, n]$ является элементом ядра оператора $\hat{A}$, то размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, которое, согласно теореме 6.7.1., равно $n - \operatorname{rg} \| \hat{A} \|_g = n - r$.

Теорема доказана.

Линейные отображения

Как было отмечено в §8.1., в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.

В §7.5. было использовано понятие взаимно однозначного отображения, называемого иногда *биекцией*. Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение 8.4.3. Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in \Omega$.

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ может не совпадать с Θ.

Определение 8.4.4. Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω, но, вообще говоря, он не единственен.

В таблице 8.4.1. приведены сравнительные примеры отображений различных типов.

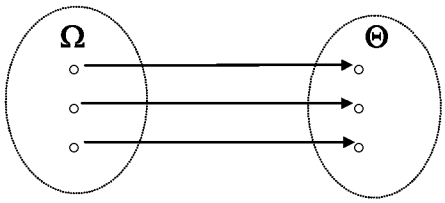
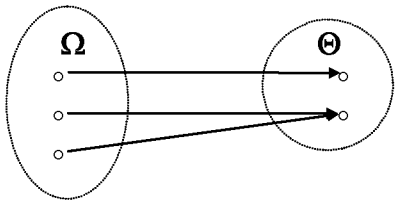
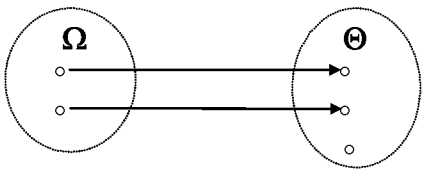
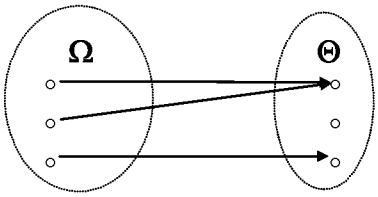
Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Таблица 8.4.1.

Рассмотрим теперь линейный оператор $\hat{A}$, отображающий элементы Λ^n в элементы Λ^m, то есть отображение, для которого $\Omega \subseteq \Lambda^n$, а $\Theta \subseteq \Lambda^m$. Допустим, что $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ есть

базис в Λ^n, а $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ - базис в Λ^m. Тогда можно сделать следующее обобщение определения 8.3.1.

Определение 8.4.5. Матрица $\|\hat{A}\|_{gf}$ размера $m \times n$, столбцы которой есть координатные разложения элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, ..., \hat{A}g_n$ по базису $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$, называется *матрицей линейного отображения* $\hat{A}$ в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$.

Отметим, что в конечномерном случае сюръективность отображения означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность - условия $\ker\hat{A} = \{o\}$. Отсюда следует, что ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов. Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет взаимно однозначным - или биекцией (см. определение 5.2.4.).

Из определения 8.4.5. следует, что матрица линейного отображения зависит как от выбора базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, так и от выбора базиса $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$. Правило изменения этой матрицы при замене базисов дает

Теорема 8.4.5. **Матрица линейного отображения $\hat{A}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ $\|\hat{A}\|_{g'f'}$ связана с матрицей этого отображения в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ $\|\hat{A}\|_{gf}$ соотношением**

$$\|\hat{A}\|_{g'f'} = \|F\|^{-1} \|\hat{A}\|_{gf} \|G\| \quad ,$$

где $\|F\|$ - матрица перехода от базиса $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ к базису $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$, а $\|G\|$ - матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

Доказательство: Аналогично доказательству теоремы 8.3.2.

В общем случае, исследование свойств оператора, у которого область значений не содержится в области его определения, может оказаться достаточно сложной задачей. Если же область значений имеет конечную размерность, не превышающую размерность области определения, то, пользуясь теоремой 7.5.1. (об изоморфизме), можно попытаться свести исследование отображения к исследованию преобразования, установив изоморфизм между областью значений отображения и некоторым подпространством области его определения.

Пример 8.4.1.

1°. Оператор $\overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}}$, ставящий в соответствие каждой точке трехмерного геометрического пространства ее ортогональную проекцию на некоторую фиксированную прямую, проходящую через начало координат, очевидно, есть отображение $\Lambda^3 \to \Lambda^1$, которое, однако, можно рассматривать и как преобразование трехмерного пространства в одномерное подпространство.

Отметим, что, хотя в данном случае и отображение и преобразование реализуют геометрически одну и ту же функцию, вид задающих их матриц может быть различным.

Например, пусть в ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ прямая, на которую выполняется ортогональное проектирование, задана направляющим вектором $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$. Несложно убедиться, что при этом радиус-вектор ортогональной проекции точки $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}$ будет иметь вид $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$, то есть матрица данного преобразования имеет вид $\begin{Vmatrix} \overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}} \end{Vmatrix}_e = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Но, с другой стороны, приняв $\vec{e}_1^{\,*}$ нормированный направляющий вектор данной прямой за базисный в Λ^1, получим, согласно определению 8.4.5., матрицу отображения в виде $\begin{Vmatrix} \overset{\Lambda}{\mathrm{Pr}} \end{Vmatrix}_{ee^*} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

2°. Пусть линейный оператор $\hat{A}$ ставит в соответствие каждой матрице второго порядка $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ двумерный столбец вида $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} \end{Vmatrix}$.

Исследование свойств данного отображения можно свести к исследованию свойств преобразования, ставящего в соответствие квадратным матрицам $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ квадратные матрицы вида

$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21}+\alpha_{22} & 0 \end{Vmatrix}$, образующие двумерное подпространство в четырехмерном пространстве квадратных матриц $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$.

Задача 8.4.1.

Линейное отображение $\hat{A}: \Lambda^3 \to \Lambda^3$ *в некотором базисе задано матрицей* $\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix}$. *Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.*

Решение:

1°. Пусть координатное представление прообраза преобразования $y = \hat{A}x$ есть $\|x\| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$, а координатное представление образа - $\|y\| = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}$. Тогда ядро - множество элементов x таких, что $\hat{A}x = o$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений $\|\hat{A}\|\|x\| = \|0\|$ или $\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0 \end{cases}$, общее решение которой есть $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения $\hat{A}$ есть линейная оболочка элемента $\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение неинъективное.

Заметим, что к этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что $\mathrm{rg}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = \mathrm{rg}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 2 < 3$ - числа столбцов матрицы отображения.

2°. Область значений линейного отображения $\hat{A}$ состоит из элементов $y \in \Theta$ таких, что $y = \hat{A}x$, $\forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y к множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix},$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы 6.6.1. (Кронекера-Капелли), сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы.

Из условия

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 2 & 3 & 4 & \eta_2 \\ 3 & 5 & 7 & \eta_3 \end{array}\right\| = \operatorname{rg}\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2\eta_1 - \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{array}\right\| = \operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{Vmatrix} = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения $\hat{A}$ состоит из элементов вида

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix} = \lambda_1 \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y \in \Theta = \Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega = \Lambda^3$, то данное отображение не является и сюръективным.

§8.5. Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение 8.5.1. Подпространство Λ^* линейного пространства Λ называется *инвариантным подпространством линейного оператора* $\hat{A}$, если для каждого элемента $x \in \Lambda^*$: $\hat{A}x \in \Lambda^*$.

Пример 8.5.1.

1°. Множество радиус-векторов точек некоторой прямой на плоскости Oxy, проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора поворота на угол π этих радиус-векторов вокруг оси Oz. (Рис. 8.5.1.)

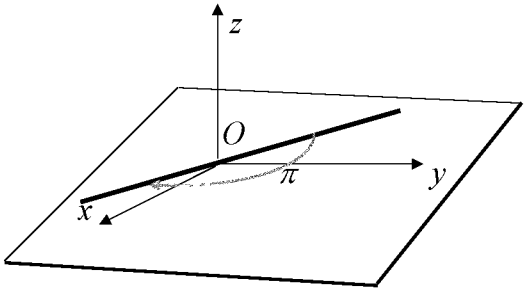


Рисунок 8.5.1.

2°. Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на (α,β) производную любого порядка, n-мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида $\{e^{\lambda_1\tau}, e^{\lambda_2\tau}, \dots, e^{\lambda_n\tau}\}$, где $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ некоторые, попарно различные константы.

Теорема 8.5.1.

Матрица линейного оператора $\hat{A}$, заданного в линейном пространстве Λ^n с базисом $\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$, тогда и только тогда имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array}\right\|,$$

когда линейная оболочка подмножества базисных элементов $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}$ есть инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Докажем достаточность. Пусть матрица оператора $\hat{A}$ имеет указанный в формулировке теоремы вид. Тогда образ любой линейной комбинации элементов $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}$ будет принадлежать их линейной оболочке, поскольку в силу определения 8.3.1. каждый столбец матрицы линейного оператора составлен из компонентов образа соответствующего базисного элемента.

Иначе говоря, если $\sum_{k=1}^{r}\lambda_k g_k \in \Lambda^*$, то и

$$\hat{A}(\sum_{k=1}^{r}\lambda_k g_k)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k(\hat{A}g_k)=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ik}g_i=\sum_{i=1}^{r}(\sum_{k=1}^{r}\alpha_{ik}\lambda_k)g_i=\sum_{i=1}^{r}\beta_i g_i\in\Lambda^*.$$

Из теоремы 7.4.1. следует, что Λ^* - подпространство. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть Λ^* есть инвариантное подпространство линейного оператора $\hat{A}$, являющееся линейной оболочкой подмножества базисных векторов $\{g_1, g_2, ..., g_r\}$.

Тогда образ любого, в том числе и базисного, элемента, принадлежащего Λ^*, также будет принадлежать Λ^*. Это, в свою очередь, означает, что

$$\hat{A}g_k=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ik}g_i+\sum_{i=r+1}^{n}0g_i\ ;\quad k=[1,r]$$

и, в сочетании с определением 8.3.1. доказывает необходимость.

Теорема доказана.

Задача 8.5.1. *Показать, что всякое инвариантное подпространство невырожденного линейного оператора $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством оператора $\hat{A}^{-1}$.*

Решение: Пусть $x\in\Lambda^*$, где - Λ^* инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$, тогда, по условию задачи, $y=\hat{A}x\in\Lambda^*$.
Если оператор $\hat{A}$ невырожденный, то для него существует обратный $\hat{A}^{-1}$ и связь элементов $x, y\in\Lambda^*$ можно записать в виде $x=\hat{A}^{-1}y$, что и означает инвариантность подпространства Λ^* относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

Рассмотрим теперь условия, при которых у линейного оператора есть *одномерное* инвариантное подпространство.

Определение 8.5.2. *Ненулевой* элемент $f\in\Lambda$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\hat{A}$, если существует число λ такое, что $\hat{A}f=\lambda f$. Число λ называется *собственным значением оператора* $\hat{A}$, *соответствующим собственному вектору* f.

Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного оператора $\hat{A}$, заданного в Λ^n, удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Это означает, что выполнены равенства $\hat{A}f_1 = \lambda_1 f_1$; $\hat{A}f_2 = \lambda_2 f_2$; ... ; $\hat{A}f_n = \lambda_n f_n$.

Приняв эти элементы за базис, исходя из определения 8.3.1., можно заключить, что матрица линейного оператора $\hat{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид

$$\left\| \hat{A} \right\|_f = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

для которого исследование свойств этого оператора существенно упрощается.

Задача 8.5.2. *Показать, что, если линейный оператор $\hat{A}$ имеет собственный вектор f с соответствующим ему собственным значением λ, то элемент f будет также являться собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$ с собственным значением λ^2.*

Решение: По условию $\hat{A}f = \lambda f$, но тогда, в силу линейности оператора $\hat{A}$

$$\hat{A}^2 f = \hat{A}(\hat{A}f) = \hat{A}(\lambda f) = \lambda^2 f .$$

Вычисление собственных векторов и собственных значений линейного оператора

Выберем в Λ^n некоторый базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, в котором разложение элемента $f \in \Lambda^n$ будет $f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, g_i$. Пусть имеется линейный оператор с матрицей $\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \alpha_{kj} \right\|$ в этом базисе.

Равенство $\hat{A} f = \lambda f$ в координатной форме в Λ^n имеет вид $\left\| \hat{A} \right\|_g \left\| f \right\|_g = \lambda \left\| f \right\|_g$, то есть

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n = \lambda\xi \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0 \end{cases} \qquad (8.5.1.)$$

Поскольку собственный вектор должен быть ненулевым по определению, то нас интересуют только *нетривиальные* решения системы (8.5.1.), необходимым условием существования которых, согласно следствию 6.7.2., является *равенство нулю определителя основной матрицы системы* (8.5.1.) Таким образом, мы приходим к условию, которому должны удовлетворять собственные значения данного линейного оператора

$$\det\left\| \alpha_{kj} - \lambda\,\delta_{kj} \right\| = 0 \quad \text{или же} \quad \det\begin{Vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad . \qquad (8.5.2.)$$

Определение 8.5.3. Уравнение $\det\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\|_g = 0$ называется *характеристическим уравнением*, а определитель $\det\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\|_g$ - *характеристическим многочленом* оператора $\hat{A}$, *действующего в* Λ^n .

Теорема 8.5.2. **Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса в Λ^n .**

Доказательство:

Заметим, что оператор $\hat{A} - \lambda\hat{E}$ очевидно линейный, в силу линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{E}$. Тогда, согласно следствию 8.3.2., его определитель не меняется при замене базиса. Поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ имеем: $\det\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\|_{g'} = \det\left\| \hat{A} - \lambda\hat{E} \right\|_g$.

Теорема доказана.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-й степени относительно λ, что следует из определения детерминанта 6.1.2. и формулы (8.5.2.).

Решив характеристическое уравнение (8.5.2.), из однородной системы уравнений (8.5.1.) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы найденным собственным значениям. Примеры использования данного алгоритма в Λ^n иллюстрируют решения задач 8.6.1. и 8.6.2. В случае же линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее. Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования имеет бесконечно много собственных векторов вида $f(\tau) = \alpha\, e^{\lambda\tau}$ (где α - произвольная ненулевая константа) и соответствующих им собственных значений λ, находимых из дифференциального уравнения $\dfrac{df}{d\tau} = \lambda f$.

§8.6. Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 8.6.1. **В комплексном линейном пространстве Λ^n всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.**

Доказательство:

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-й степени относительно λ, то к нему применима *основная теорема высшей алгебры* [1]), утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема доказана.

В случае вещественного линейного пространства теорема 8.6.1. неверна. Например, линейный оператор поворота плоскости Oxy вокруг начала координат на угол $\varphi \neq k\pi$ не имеет ни одного собственного вектора. Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид (см. §5.5.)

$$\det\begin{Vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0,$$

то есть $\lambda = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$. Отсюда следует, что при $\varphi \neq k\pi$ вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

Теорема 8.6.2. **В вещественном линейном пространстве Λ^n всякий линейный оператор имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.**

Доказательство:

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (8.5.1.) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, решив систему (8.5.1.) , получим соответствующий ему комплекснозначный собственный вектор $f = u + wi$, где u и w - элементы Λ^n, представляемые вещественными n-компонентными столбцами.

Покажем, что u и w линейно независимые. Допустим противное: $u = \kappa w$. Тогда из соотношения $\hat{A} f = \lambda f$ имеем, что $\hat{A}((\kappa + i)w) = \lambda(\kappa + i)w$, или $\hat{A} w = \lambda w$, то есть λ - вещественное, что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

---

[1]) Доказывается, например, в курсе ТФКП.

Подставим выражения для собственного значения и собственного вектора в их определение: $\hat{A}f = \lambda f$. Получаем $\hat{A}(u + wi) = (\alpha + \beta i)(u + wi)$ или $(\hat{A}u) + (\hat{A}w)i = (\alpha u - \beta w) + (\beta u + \alpha w)i$, и из равенства действительных и мнимых частей находим, что $\begin{cases} \hat{A}u = \alpha u - \beta w \\ \hat{A}w = \beta u + \alpha w \end{cases}$.

Но это и означает, что оператор $\hat{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с двумерной линейной оболочкой элементов u и w, поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi u + \eta w) &= \xi \hat{A}u + \eta \hat{A}w = \xi(\alpha u - \beta w) + \eta(\beta u + \alpha w) \\ &= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)w \end{aligned} .$$

Теорема доказана.

Задача 8.6.1. *Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей* $\begin{Vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$.

Решение:

1°. Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\hat{A}$ действует в комплексном линейном пространстве.

Будем искать собственные значения по формулам (8.5.1.)-(8.5.2.). Воспользовавшись правилом разложения определителя по первой строке (см. теорему 1.1.1.), получим

$$\det\begin{Vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{Vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 + 2(2\lambda - 6 + 6) + 2(4 - 3 - 3\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) .$$

Откуда получаем, что из трех собственных значений одно $\lambda_1 = 1$ - вещественное и два $\lambda_2 = i$ и $\lambda_2 = -i$ - комплексно сопряженные [1]).

[1]) См. приложение 3.

2°. Найдем теперь собственные векторы. Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда

$$\begin{Vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Преобразовав матрицу построенной системы линейных уравнений, получим компоненты собственных векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_3 из условий $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Следовательно, собственный вектор f_1, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \mu \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad \forall \mu \neq 0.$$

3°. Пусть теперь $\lambda = \lambda_2 = i$, тогда систему линейных уравнений (8.5.1.)

$$\begin{Vmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

можно упростить, разделив [1]) обе части первого уравнения на $1+i$. Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить, как линейно зависимое.

Заменив затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & -1+3i & 2i \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

---

[1]) Правило деления комплексных чисел приведено в Приложении 3.

И, наконец, после умножения обеих частей второго уравнения на $(-i)$, приходим к

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & 3+i & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Полагая значение свободного неизвестного $\xi_3 = 3+i$, находим второй собственный вектор $f_2 = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \mu \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{Vmatrix}$; $\forall \mu \neq 0$.

4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = -i$, имеет вид $f_3 = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \mu \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-i \end{Vmatrix}$; $\forall \mu \neq 0$.

(Покажите самостоятельно, что, комплексная сопряженность f_2 и f_3 не случайна, то есть: если λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и собственные векторы f_2 и f_3.)

5°. Если оператор $\hat{A}$ действует в вещественном линейном пространстве, то согласно теореме 8.6.2. $\hat{A}$ имеет собственный вектор $\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболочкой элементов $u = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$ и $w = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, то есть которое будет состоять из элементов вида $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \mu_1 \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} + \mu_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$; $\forall \mu_1 \mu_2$.

Заметим, что при необходимости искомое инвариантное подпространство может быть задано и в виде $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$ (см., например, решение задачи 8.4.1.)

Теорема 8.6.3.

Совокупность собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного оператора $\hat{A}$, дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ, является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых, не равных нулю одновременно чисел α и β

$$\hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\hat{A}f_1 + \beta\hat{A}f_2 = \alpha\lambda f_1 + \beta\lambda f_2 = \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2),$$

что и показывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Определение 8.6.1.

Подпространство состоящее из собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным подпространством* (или, просто, *собственным*) линейного оператора $\hat{A}$.

Теорема 8.6.4.

Всякое инвариантное собственное подпространство линейного оператора $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством линейного оператора $\hat{B}$, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.

Доказательство:

Пусть Λ^* - инвариантное собственное подпространство оператора $\hat{A}$, то есть $\hat{A}f = \lambda f$, $\forall f \in \Lambda^*$.

Но тогда справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$, а в силу коммутируемости и линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, будет верно и $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f)$ при $\forall f \in \Lambda^*$.

Последнее условие означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^*$ при $\forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* - инвариантное подпространство оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Теорема 8.6.5. **Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.**

Доказательство:

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой.

Пусть имеются m линейно независимых собственных векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ оператора $\hat{A}$, отвечающих различным собственным значениям. Покажем, что в этом случае будут линейно независимы и m+1 собственных векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$, если они также отвечают различным собственным значениям.

Предположим противное: существует, нетривиальная и равная нулевому элементу, линейная комбинация собственных векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \ldots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = o, \qquad (8.6.1.)$$

причем без ограничения общности можно считать, что число $\kappa_{m+1} \neq 0$.

Подействуем на обе части равенства (8.6.1.) оператором $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} &\hat{A}(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \ldots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}) = \\ &= \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \ldots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} = o \quad . \end{aligned} \qquad (8.6.2.)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (8.6.1.) на λ_{m+1} и вычитая почленно результат этого умножения из равенства (8.6.2.), получим

$$\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) f_1 + \kappa_2(\lambda_2 - \lambda_{m+1}) f_2 + \ldots + \kappa_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) f_m = o .$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы $f_1, f_2, \ldots, f_m$ линейно независимые, то $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_m = 0$. Но тогда из (8.6.1.) следует $\kappa_{m+1} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ следует линейная независимость элементов $f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}$.

Теорема доказана.

Следствие 8.6.1. **Линейный оператор $\hat{A}$ в Λ^n может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем n собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.**

Теорема 8.6.6. **Если линейный оператор $\hat{A}$, действующий в Λ^n, имеет n различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами $\hat{A}$, в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее диагонали расположены собственные числа оператора $\hat{A}$.**

Доказательство:

Следует из теоремы 8.6.5. и замечания о важности собственных векторов §8.5.

Теорема 8.6.7. **Пусть Λ^* - инвариантное собственное подпространство линейного оператора $\hat{A}$, отвечающее некоторому собственному значению λ_0 кратности k. Тогда имеет место соотношение $1 \le \dim(\Lambda^*) \le k$.**

Доказательство:

Выберем в Λ^n базис $\{g_1, g_2, ..., g_m, g_{m+1}, ..., g_n\}$ так, чтобы его первые $m = \dim(\Lambda^*)$ элементов принадлежали Λ^*. В силу условия кратности собственного значения $\hat{A}g_i = \lambda_0 g_i$; $i = [1, m]$, поэтому матрица $\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g$ в этом базисе будет иметь вид

$$\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g = \begin{Vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\det\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda)$. Поскольку множители вида $(\lambda_0 - \lambda)$ могут содержаться также и в многочлене $P_{n-m}(\lambda)$, то $k \ge m$, если k - кратность корня λ_0 характеристического многочлена $\det\left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g$.

Условие $1 \le m$ очевидно, поскольку подпространство Λ^* ненулевое.

Теорема доказана.

Таким образом, размерность инвариантного собственного подпространства Λ^*, отвечающего собственному значению λ_0 кратности k, может оказаться меньше k, что иллюстрирует

Задача 8.6.2. *Найти собственные значения и собственные векторы оператора, действующего в пространстве двумерных столбцов и заданного матрицей* $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение: Находим собственные значения:

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

то есть $\lambda_{1,2}=1$ и кратность собственного значения $k=2$. Найдем теперь собственные векторы

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \mu \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \forall \mu \ne 0.$$

Таким образом, получаем, что данный линейный оператор имеет одномерное инвариантное собственное подпространство ($m = \dim(\Lambda^*) = 1$), соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ кратности 2.

Теорема 8.6.8. **Линейный оператор $\hat{A}$ в Λ^n имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда оператор $\hat{A}$ не является взаимно однозначным.**

Доказательство:

Линейный оператор $\hat{A}$ имеет в Λ^n собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда его матрица вырожденная, то есть, в любом базисе $\det \| \hat{A} \| = 0$.

Пусть в Λ^n координатный столбец образа связан с координатным столбцом прообраза

$$\begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}.$$

Из теоремы 6.4.1. (Крамера) следует, что для заданного координатного столбца элемента-образа эта система линейных уравнений, у которой неизвестными являются компоненты столбца элемента-прообраза, либо будет несовместной (элемент-прообраз не существует), либо будет иметь согласно следствию 6.7.1. неединственное решение (элемент-прообраз определяется неоднозначно).

Теорема доказана.

Определение 8.6.2.

Степенью квадратной матрицы $\|Q\|$ с натуральным показателем $k \geq 2$ называется произведение k сомножителей вида $\|Q\|$. Будем также считать, что $\|Q\|^1 = \|Q\|$ и $\|Q\|^0 = \|E\|$.

Теорема 8.6.9. (Гамильтона-Кэли)

Матрица линейного оператора $\hat{A}$ в Λ^n удовлетворяет его характеристическому уравнению.

Доказательство:

Докажем данную теорему в предположении, что собственные векторы оператора $\hat{A}$ образуют в Λ^n базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Пусть данный линейный оператор $\hat{A}$ в этом базисе имеет матрицу $\|\hat{A}\|_f$ и характеристическое уравнение $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k = 0$. Тогда в силу линейности $\hat{A}$ для собственного вектора f, соответствующего собственному значению λ, имеем (см. задачу 8.5.2.)

$$(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k)\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\|\hat{A}\|_f^k \|f\|) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\|\hat{A}\|_f (\|\hat{A}\|_f \dots (\|\hat{A}\|_f \|f\|)\dots)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\lambda^k \|f\|) = (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k)\|f\| = 0\|f\| = \|o\| \quad .$$

Но поскольку это соотношение верно для всех базисных векторов, то оно будет верно и для каждого элемента $x \in \Lambda^n$. Тогда из леммы 5.1.2. следует, что $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \| \hat{A} \|_f^k = \| \hat{O} \|_f$.

Наконец, выполнив переход к произвольному базису $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \| \hat{A} \|_g^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_f \| S \|)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_f \| S \| \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_f \| S \| ... \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_f \| S \|) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_f^k \| S \|) = \| S \|^{-1} (\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \| \hat{A} \|_f^k) \| S \| =$$

$$= \| S \|^{-1} \| \hat{O} \|_f \| S \| = \| \hat{O} \|_g \quad .$$

Теорема доказана.

Замечание: теорема Гамильтона-Кэли также верна и для линейных операторов, из собственных векторов которых базис образовать не удается.

§8.7. Линейные функционалы

Рассмотрим специальный случай линейного оператора, когда его область значений содержится в одномерном линейном пространстве, изоморфном множеству вещественных чисел. Такого рода зависимости, следуя классификации, введенной в §5.2., следует относить к функционалам. Напомним данное ранее

Определение 8.7.1. Пусть каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ поставлено в соответствие однозначно определяемое число, обозначаемое $f(x)$. Тогда говорят, что в Λ задан *функционал* $f(x)$.

Пример 8.7.1. 1°. В пространстве n-компонентных столбцов можно задать функционал, поставив столбцу $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ в соответствие число $\sum_{i=1}^{n} \phi_i \xi_i$, где ϕ_i, $i = [1, n]$ - некоторые фиксированные константы.

2°. В векторном геометрическом пространстве функционалом является длина вектора, то есть $f(x)=|\vec{x}|$.

3°. В пространстве функций $x(\tau)$, определенных на [-1,1] функционалом является $f(x)=x(0)$ - "*дельта-функция*", обозначаемая как $\delta(x)$, ставящая в соответствие каждой функции $x(\tau)$ ее значение в нуле.

4°. В пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на $[\alpha,\beta]$, функционалом является определенный интеграл, то есть $f(x)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} p(\tau)x(\tau)d\tau$, где $p(\tau)$ - некоторая заданная на $[\alpha,\beta]$ непрерывная функция.

5°. В линейном пространстве квадратных матриц вида $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$ функционалом является определитель

$$\det\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение 8.7.2. Функционал $f(x)$ называется *линейным функционалом* (или *линейной формой*), если для любых $x,y\in\Lambda$ и любого числа λ:

1°. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

2°. $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.

Задача 8.7.1. *Доказать, что функционалы в примерах* 1°, 3° *и* 4° *являются линейными, а функционалы в примерах* 2° *и* 5° *- нет.*

Представление линейного функционала в Λ^n

Пусть в Λ^n дан базис $\{g_1,g_2,...,g_n\}$ и пусть координатное представление элемента линейного пространства имеет вид $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i g_i$. Тогда, в силу линейности функционала, справедливы соотношения $f(x)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i g_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\, f(g_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\phi_i\xi_i$, где $\phi_i=f(g_i)$, $i=[1,n]$ - числа, называемые *компонентами линейного функционала в данном базисе*.

Из последних равенств следует, непосредственно проверяемая

Теорема 8.7.1. **Каждый линейный функционал $f(x)$ в Λ^n в конкретном базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ имеет однозначно определяемую строку компонентов $\| f \|_g = \| \phi_1 \quad \phi_2 \quad \ldots \quad \phi_n \|$, а каждая строка компонентов $\| \phi_1 \quad \phi_2 \quad \ldots \quad \phi_n \|$ в конкретном базисе определяет в Λ^n некоторый линейный функционал $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \xi_i$.**

Запись координатного представления линейного функционала в Λ^n в виде *строки* (а не столбца) использована, чтобы обеспечить соответствие этого представления определению 8.4.5., поскольку линейный функционал в Λ^n можно рассматривать как линейное отображение $\Lambda^n \to \Lambda^1$.

Заметим, что в Λ^n в матричной форме каждый линейный функционал $f(x)$ в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ может быть записан как $f(x) = \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| x \|_g$.

Задача 8.7.2. *Показать, что в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ операции сложения и умножения на число для линейных функционалов $p(x)$ и $q(x)$ в координатном представлении имеют вид:*

$$\| p + q \|_g = \| \phi_1 + \psi_1 \quad \phi_2 + \psi_2 \quad \ldots \quad \phi_n + \psi_n \| \quad \text{и} \quad \| \lambda p \|_g = \| \lambda \phi_1 \quad \lambda \phi_2 \quad \ldots \quad \lambda \phi_n \|,$$

где $\| p \|_g = \| \phi_1 \quad \phi_2 \quad \ldots \quad \phi_n \|$ *и* $\| q \|_g = \| \psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \psi_n \|$.

Получим теперь правило изменения компонент линейного функционала в Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \ldots, g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\| S \| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{Vmatrix}$, где $g'_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} g_i$ для $\forall\, j=[1,n]$. Координатные представления некоторого элемента x будут иметь в рассматриваемых базисах вид $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i = \sum_{i=1}^{n} \xi'_i g'_i$, а координатные представления линейного функционала $f(x)$, соответственно $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \phi'_i \xi'_i$.

Найдем выражения для величин ϕ_i' через ϕ_i. Используя введенные обозначения, получаем $\phi_i' = f(g_i') = f(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} g_k) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ki} f(g_k) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \sigma_{ki}$, что доказывает следующее утверждение:

Теорема 8.7.1. **В Λ^n в базисах $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и $\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$ компоненты координатных представлений линейного функционала $\|f\|_g = \|\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\|$ и $\|f\|_{g'} = \|\phi_1', \phi_2', \ldots, \phi_n'\|$ связаны соотношением $\phi_k' = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \sigma_{ik}$; $k = [1, n]$, где коэффициенты σ_{ik} - коэффициенты матрицы перехода от первого базиса ко второму.**

В матричной форме это утверждение имеет вид $\|f\|_{g'} = \|f\|_g \|S\|$, что означает, что компоненты линейного функционала в Λ^n преобразуются при замене базиса так же, как преобразуются столбцы базисных элементов (см. §7.3.).

Двойственное (сопряженное) пространство. Взаимный (биортогональный) базис

Поскольку линейные функционалы в Λ являются частным случаем линейных операторов, то для них можно ввести операции сравнения, сложения и умножения на число. Очевидно, что при этом будут справедливы все утверждения §8.2. В том числе и

Теорема 8.7.2. **Множество всех линейных функционалов, заданных в линейном пространстве Λ, является линейным пространством.**

Определение 8.7.3. Линейное пространство линейных функционалов, заданных в Λ, называется *двойственным* (или *сопряженным*) пространству Λ и обозначается Λ^+.

Теорема 8.7.1. устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством линейных функционалов и множеством n – компонентных строк, последнее из которых является линейным n – мерным пространством. Принимая во внимание, что операции с линейными функционалами в координатном представлении в Λ^n совпадают с аналогичными операциями для n – компонентных строк, можно прийти к заключению об изоморфности линейных пространств Λ^n и Λ^{n+}. Поэтому будет справедлива

Теорема 8.7.3. **Размерность пространства Λ^{n+}, двойственного Λ^n, равна n.**

Как и во всяком $n-$ мерном линейном пространстве, в Λ^{n+} должен существовать базис. Пусть он состоит из элементов $\{r_1, r_2, ..., r_n\}; r_i \in \Lambda^{n+}; \forall i = [1, n]$. Тогда каждый элемент $f \in \Lambda^{n+}$ может быть представлен (и притом единственным образом) в виде линейной комбинации базисных элементов, то есть $f = \sum_{i=1}^{n} \rho_i r_i$, а соответствующее координатное представление элемента f будет $\| f \|_r = \begin{Vmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_n \end{Vmatrix}$ - стандартное для $n-$ мерного линейного пространства столбцовое представление.

Связь между базисами $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в Λ^n и $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ в Λ^{n+} задается квадратной, порядка n матрицей $\| \Gamma \|_{rg}$, элементами которой являются числа $\gamma_{ij} = r_i(g_j); i, j = [1, n]$ - значения функционала r_i на элементе g_j.

Определение 8.7.4. Если матрица $\| \Gamma \|_{rg} = \| E \|$, то есть $\gamma_{ij} = \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{bmatrix}; i, j = [1, n]$, то базисы $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ называются *взаимными* (*биортогональными*).

Отметим, что, если базис $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ в Λ^{n+} является взаимным для базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в Λ^n, то для любого линейного функционала $f(x)$ его координатные представления в Λ^n и в Λ^{n+} связаны очевидным соотношением $\| f \|_r = \| f \|_g^{\mathrm{T}}$.

Задача 8.7.3. *Доказать, что, если базис $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ в Λ^{n+} не является взаимным для базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в Λ^n, то $\| f \|_r = (\| \Gamma \|_{rg}^{\mathrm{T}})^{-1} \| f \|_g^{\mathrm{T}}$.*

Вторичное двойственное (вторичное сопряженное) пространство

Поскольку Λ^{n+} является $n-$ мерным линейным пространством, то в нем, также как и в Λ^n, возможно определить линейные функционалы и рассматривать их множество как новое линейное пространство Λ^{n++}, двойственное к Λ^{n+}. Будем называть пространство Λ^{n++} *вторичным двойственным* для линейного пространства Λ^n.

Вполне очевидно, что линейные пространства Λ^n, Λ^{n+} и Λ^{n++} n – мерные и, следовательно, изоморфны друг другу. Однако, между пространствами Λ^n и Λ^{n++} существует специальный изоморфизм, позволяющий не делать различия между ними, и который может быть построен следующим образом.

Пусть x - некоторый элемент из Λ^n, а $X(f)$ - действующий в Λ^{n+} функционал такой, что $X(f) = f(x)$; $\forall f \in \Lambda^{n+}$. Убедимся вначале, что $X(f)$ линейный на Λ^{n+}, то есть он будет некоторым элементом в Λ^{n++}. Действительно,

$$X(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 X(f_1) + \lambda_2 X(f_2); \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Re; \quad f_1, f_2 \in \Lambda^{n+} .$$

Это означает, что $X(f) \in \Omega$; $\forall f \in \Lambda^{n+}$, где, согласно теореме 8.4.1., Ω - подпространство линейного пространства Λ^{n++}.

Теперь рассмотрим отображение $X(x): \Lambda^n \to \Omega$, которое можно записать и как $y = X(f(x))$, $\forall x \in \Lambda^n$; $y \in \Omega$. Оно будет линейным, как произведение (композиция) линейных отображений $X(f)$ и $f(x)$, и, кроме того, очевидно взаимно однозначным. Следовательно, $y = X(f(x))$ - отображение, устанавливающее изоморфизм линейного пространства Λ^n и множества Ω, а тогда, в силу теоремы 7.5.1., $\dim(\Omega) = \dim(\Lambda^n) = n$.

Наконец, отметим, что сочетание условий $\dim(\Lambda^{n++}) = n = \dim(\Omega)$ и $\Omega \subset \Lambda^{n++}$ означает совпадение множества Ω и линейного пространства Λ^{n++}.

Таким образом, мы приходим к заключению, что отображение $y = X(f(x))$, $\forall x \in \Lambda^n$; $y \in \Lambda^{n++}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами линейных пространств Λ^n и Λ^{n++}, позволяющее считать их одним и тем же пространством Λ^n и записывать связь между значениями линейных функционалов, действующих в Λ^n и Λ^{n+}, в симметричной форме вида $x(f) = f(x)$; $\forall x \in \Lambda^n$; $\forall f \in \Lambda^{n+}$.