Раздел 10
ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§10.1. Определение и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

Определение 10.1.1. Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число (x,y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1°. $(x,y)=(y,x)$;

2°. $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;

3°. $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;

4°. $(x,x)\geq 0$, причем $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=o$,

тогда говорят, что задано *евклидово пространство* E.

Замечание: аксиомы 1°.-4°. в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейный* (что следует из 2° и 3°) и *симметричный* (следует из 1°) функционал, который, кроме того, порождает *положительно определенный квадратичный* (следует из 4°) функционал. Любой билинейный функционал, обладающий данными свойствами, может быть принят за скалярное произведение.

Пример 10.1.1. 1°. Трехмерное геометрическое пространство со скалярным произведением, введенным по правилам §2.2., является евклидовым.

2°. Пространство n-мерных столбцов $x = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$; $y = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix}$ со скалярным произведением, определяемым по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

3°. Евклидовым будет пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций со скалярным произведением $(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau$.

Задача 10.1.1. *Можно ли в Λ^3 скалярное произведение определить как произведение длин векторов на куб косинуса угла между ними?*

Решение: Нет, нельзя, так как не будет выполняться пункт 3° определения 10.1.1.

Определение 10.1.2. В евклидовом пространстве E назовем

1°. *Нормой* (или *длиной*) элемента x число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

2°. *Расстоянием* между элементами x и y число $|x - y|$.

Замечание: использование для обозначения нормы элемента ограничителей вида $|\dots|$ не приводит к каким-либо конфликтам с введенными ранее обозначениями, поскольку для линейного пространства вещественных чисел норма числа очевидно совпадает с его абсолютной величиной, для комплексного числа норма совпадает с его модулем, а для линейного пространства геометрических векторов - с длиной вектора.

Теорема 10.1.1. (Неравенство Коши-Буняковского) **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|(x, y)| \le |x||y|$.**

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ и вещественного числа τ элемент $x - \tau y \in E$. Согласно 4° из 10.1.1.

$$0 \le (x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - 2(x, y)\tau + (y, y)\tau^2 = |x|^2 - 2(x, y)\tau + |y|^2 \tau^2, \ \forall \tau \quad .$$

Полученный квадратный трехчлен неотрицателен для любого τ тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен, то есть $(x,y)^2 - |x|^2|y|^2 \le 0$.

Теорема доказана.

Задача 10.1.2. *Показать, что неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимые.*

Следствие 10.1.1. (Неравенство треугольника) **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|x+y| \le |x| + |y|$.**

Доказательство:

Из аксиом евклидова пространства и неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$$

$$\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

откуда, в силу неотрицательности чисел $|x+y|$ и $|x|+|y|$, получаем неравенство треугольника.

Следствие доказано.

Отметим, что неравенства Коши-Буняковского и треугольника для евклидова пространства из примера 10.1.1.(2°) имеют вид:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \xi_j^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{k} \eta_k^2} \quad ; \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \xi_j^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{k} \eta_k^2},$$

$$\forall \xi_i, \eta_i \ ; \ i = [1,n] \qquad\qquad \forall \xi_i, \eta_i \ ; \ i = [1,n]$$

в то время как для евклидова пространства из примера 10.1.1.(3°), соответственно:

$$\left| \int_\alpha^\beta x(\tau)y(\tau)d\tau \right| \le \sqrt{\int_\alpha^\beta x^2(\tau)d\tau}\sqrt{\int_\alpha^\beta y^2(\tau)d\tau}\ ;\ \sqrt{\int_\alpha^\beta (x(\tau)+y(\tau))^2 d\tau} \le \sqrt{\int_\alpha^\beta x^2(\tau)d\tau} + \sqrt{\int_\alpha^\beta y^2(\tau)d\tau}\ .$$

Определение 10.1.3. В евклидовом пространстве E *величиной угла* между ненулевыми элементами x и y назовем число $\alpha \in [0,\pi]$, удовлетворяющее соотношению $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

Из неравенства Коши-Буняковского (теорема 10.1.1.) следует, что величина угла существует для любой пары ненулевых элементов в E.

Определение 10.1.4. В евклидовом пространстве E ненулевые элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$.

Нулевой элемент евклидова пространства считается ортогональным любому другому элементу.

§10.2. Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

Определение 10.2.1. В конечномерном евклидовом пространстве E^n базис $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ называется *ортонормированным*, если $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$, $\forall i,j=[1,n]$.

Теорема 10.2.1. (Грама-Шмидта) **Во всяком евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис.**

Доказательство:

1°. Пусть в E^n дан некоторый, вообще говоря, неортогональный базис $\{g_1,g_2,...,g_n\}$. Построим вначале базис $\{e'_1,e'_2,...,e'_n\}$ из попарно ортогональных элементов. Последовательное построение этих элементов будем называть *процессом ортогонализации базиса*.

Возьмем $e'_1 = g_1$. Элемент e'_2 будем искать в виде $e'_2 = g_2 + \alpha e'_1$, где α - некоторая константа. Подберем α так, чтобы $(e'_1,e'_2)=0$,

для этого достаточно, чтобы

$$(e_1', e_2') = (e_1', g_2 + \alpha e_1') = (e_1', g_2) + \alpha (e_1', e_1') = 0\,; \quad \alpha = -\frac{(e_1', g_2)}{(e_1', e_1')}.$$

Заметим, что $e_2' \neq o$. Действительно, из $o = e_2' = g_2 + \alpha e_1' = g_2 + \alpha g_1$ следует линейная зависимость g_1 и g_2, что противоречит условию принадлежности этих элементов базису (см. лемму 7.2.2.).

2°. Допустим теперь, что нам удалось ортогонализовать k-1 элемент, и примем в качестве e_k' элемент $e_k' = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e_j'$. Потребуем, чтобы $(e_k', e_i') = 0$; $\forall i = [1, k-1]$:

$$(e_i', e_k') = (e_i', g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e_j') = (e_i', g_k) + \alpha_i (e_i', e_i') = 0\,;$$

$$\alpha_i = -\frac{(e_i', g_k)}{(e_i', e_i')}\,; \quad i = [1, k-1].$$

Покажем теперь, что в этом случае $e_k' \neq o$. Допустим противное: $e_k' = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j\, e_j' = o$. Однако поскольку все элементы e_i'; $i = [1, k-1]$ по построению есть некоторые линейные комбинации элементов g_i; $i = [1, k-1]$, мы приходим к линейной зависимости g_i; $i = [1, k]$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $e_k' \neq o$.

3°. Процесс ортогонализации продолжается до исчерпания множества элементов g_i; $i = [1, n]$, после чего достаточно пронормировать полученные элементы e_i'; $i = [1, n]$, чтобы получить искомый ортонормированный базис $\left\{ \frac{e_1'}{|e_1'|}, \frac{e_2'}{|e_2'|}, \ldots, \frac{e_n'}{|e_n'|} \right\}$.

Теорема доказана.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта может быть применен к любой, в том числе и к линейно зависимой, системе элементов евклидова пространства. Если ортогонализуемая

система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент, после отброса которого можно продолжить процесс ортогонализации.

§10.3. Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ в евклидовом пространстве является матрица Грама.

Определение 10.3.1. В евклидовом пространстве E матрицей Грама системы элементов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ называется матрица

$$\|\Gamma\|_f = \begin{Vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \cdots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \cdots & (f_2, f_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \cdots & (f_k, f_k) \end{Vmatrix}.$$

Пусть в E^n дан базис $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, согласно определению 10.1.1., представляется в виде

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)$; $\forall i, j = [1, n]$ - компоненты матрицы $\|\Gamma\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама*. Заметим, что эта матрица симметрическая и является матрицей билинейного функционала, задающего скалярное произведение. Тогда координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x, y) = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \|\xi_1 \quad \xi_2 \quad \ldots \quad \xi_n\| \begin{Vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \ldots & (g_n, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \ldots & (g_n, g_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \ldots & (g_n, g_n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{Vmatrix},$$

где $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ - координатные представления (столбцы) элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Очевидно, что эта формула согласуется с §2.3. и §9.2.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе $\|\Gamma\|_e = \|E\|$, а формула для скалярного произведения принимает вид $(x, y) = \|x\|_e^{\mathrm{T}} \|y\|_e = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

Теорема 10.3.1. **Для базисной матрицы Грама $\|\Gamma\|_g$ в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$.**

Доказательство:

Из определения 10.1.1. следует, что скалярное произведение есть билинейный, симметричный функционал, поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ к базису $\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$ (с матрицей перехода $\|S\|$) по теореме 9.1.1. для матрицы Грама имеют место равенства:

$$\|\Gamma\|_{g'} = \|S\|^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|S\| \quad ; \quad \det\|\Gamma\|_{g'} = \det\|\Gamma\|_g (\det\|S\|)^2, \text{ где } \det\|S\| \neq 0,$$

откуда следует, что значение $\operatorname{sgn}(\det\|\Gamma\|_g)$ инвариантно, то есть не изменяется при замене базиса. Наконец, приняв во внимание, что в ортонормированном базисе $\det\|\Gamma\|_e = 1$, приходим к заключению, что в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$.

Теорема доказана.

Следствие 10.3.1. **Система элементов $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ в E^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Доказательство:

Если элементы $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ линейно зависимы, то определитель их матрицы Грама равен нулю. Действительно, пусть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k = o$.

Умножив это равенство скалярно слева на f_i ; $\forall i = [1, k]$, получим $\lambda_1(f_i, f_1) + \lambda_2(f_i, f_2) + \ldots + \lambda_k(f_i, f_k) = 0$; $\forall i = [1, k]$. Тогда, согласно правилам действий с матрицами (см. §1.1.), следует, что линейная комбинация столбцов матрицы Грама, имеющая коэффициентами числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, будет равна нулевому столбцу и, следовательно, будет равен нулю определитель матрицы Грама (см. лемму 6.5.2. и теорему 6.5.2.).

С другой стороны, если элементы $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке и к ним применим результат теоремы 10.3.1.

Следствие доказано.

Теперь можно доказать необходимость в теореме 9.3.4.

Теорема 9.3.4. (Критерий Сильвестра)

Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид

$$\det\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{Vmatrix} \quad ; \quad k = [1, n],$$

были положительными.

Доказательство необходимости:

1°. В §10.1. было отмечено, что введение скалярного произведения в линейном пространстве равносильно заданию некоторого симметричного билинейного функционала, порождающего положительно определенный квадратичный функционал. Обратно, по положительно определенному квадратичному функционалу, однозначно восстанавливается породивший его симметричный билинейный функционал, который можно принять за скалярное произведение.

2°. Покажем, что у положительно определенного квадратичного функционала все главные миноры его матрицы положительны. Действительно, если ввести в Λ^n скалярное произведение при помощи его порождающего билинейного функционала, то матрица этого квадратичного функционала в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ есть матрица Грама.

Рассмотрим последовательно линейные оболочки систем элементов вида $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$; $k = [1, n]$. Все эти системы линейно независимые (как подмножества базиса) и по теореме 10.3.1. соответствующие им матрицы Грама имеют положительные определители, поэтому

$$\det\begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kk} \end{Vmatrix} = \det\begin{Vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \cdots & (g_1, g_k) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \cdots & (g_2, g_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \cdots & (g_k, g_k) \end{Vmatrix} > 0 \; ; \quad k = [1, n].$$

Теорема доказана.

Теорема 10.3.2.

Координатный столбец любого элемента x евклидова пространства E^n в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ может быть представлен в виде

$$\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g,$$

где $\|\Gamma\|_g$ - матрица Грама, а столбец $\|b\|_g = \begin{Vmatrix} (x, g_1) \\ (x, g_2) \\ \ldots \\ (x, g_n) \end{Vmatrix}$.

Доказательство:

Умножим обе части равенства $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ скалярно на g_k, $k = [1, n]$. Тогда получим систему уравнений $\sum_{i=1}^{n} \xi_i (g_i, g_k) = (x, g_k)$, $k = [1, n]$, основная матрица которой есть матрица Грама. Поскольку, в силу теоремы 10.3.1., эта матрица невырожденная, приходим к формуле $\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g$.

Теорема доказана.

Следствие 10.3.2.

В ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ евклидова пространства E^n для любого элемента $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E^n$ имеют место равенства $\xi_i = (x, e_i)$, $i = [1, n]$.

Доказательство:

Для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ матрица Грама единичная, поэтому из теоремы 10.3.2. получаем, что $\xi_i = (x, e_i)$, $i = [1, n]$.

Следствие доказано.

Замечание: формула $\xi_i = (x, e_i)$, $i = [1, n]$ малополезна для конечномерных евклидовых пространств, поскольку элемент x в этом случае однозначно и полностью описывается своими координатами. Однако, данная формула может быть использована для обобщения понятия координатного представления на случай евклидовых пространств с неограниченным числом линейно независимых элементов (см. §12.3.)

§10.4. Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве

Согласно определению 5.1.4. матрица $\|Q\|$, удовлетворяющая соотношению $\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|Q\|^{-1}$, называется ортогональной, причём для любой ортогональной матрицы справедливы равенства $\|Q\|^{\mathrm{T}}\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^{\mathrm{T}} = \|E\|$ и $\det\|Q\| = \pm 1$. Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

Теорема 10.4.1. **Ортогональные матрицы (и только они) в E^n могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.**

Доказательство:

Рассмотрим два различных ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ в E^n с матрицей перехода $\|S\|$ от первого базиса ко второму. Поскольку в этих базисах матрица Грама единичная, то из соотношения $\|\Gamma\|_{e'} = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_e\|S\|$ следует равенство $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|E\|\|S\|$, или $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|S\|$. Поскольку матрица перехода $\|S\|$ невырожденная, то, окончательно, имеем $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$.

Теорема доказана.

В развернутой форме равенство $\|E\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|S\|$ принимает вид $\delta_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ki}^{\mathrm{T}}\sigma_{il}$; $k, l = [1, n]$, которое для частного случая $n = 3$ было получено в §2.9.

Теорема 10.4.2. **Собственные значения линейного оператора, имеющего в E^n ортогональную матрицу, равны по модулю единице.**

Доказательство:

Из равенства $\|\hat{A}\|_g\|f\|_g = \lambda\|f\|_g$ следует, что $\|f\|_g^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} = \lambda\|f\|_g^{\mathrm{T}}$. Перемножив почленно эти равенства, получим соотношение $\|f\|_g^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\|_g\|f\|_g = \lambda^2\|f\|_g^{\mathrm{T}}\|f\|_g$. В силу ортогональности $\|\hat{A}\|_g$ имеем $\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\|_g = \|\hat{E}\|$, а потому $\|f\|_g^{\mathrm{T}}\|f\|_g = \lambda^2\|f\|_g^{\mathrm{T}}\|f\|_g$ и, наконец, $\lambda^2 = 1$, поскольку собственные векторы f ненулевые.

Теорема доказана.

Ортогональные матрицы также играют важную роль в вычислительных методах алгебры, что, например, иллюстрирует

Теорема 10.4.3. **Если матрица $\|A\|$ невырожденная, то ее разложение вида $\|A\|=\|Q\|\|R\|$, где $\|Q\|$ - ортогональная матрица, а $\|R\|$ - верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, существует и единственно.**

Доказательство:

Предположим, что имеется[1]) два разложения $\|A\|=\|Q_1\|\|R_1\|=\|Q_2\|\|R_2\|$. Из невырожденности $\|A\|$ следует невырожденность $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$, поскольку $\|Q_1\|$ и $\|Q_2\|$ ортогональные и очевидно невырожденные. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $\|Q_2\|^{\mathrm{T}}\|Q_1\|=\|R_2\|\|R_1\|^{-1}$, где $\|R_1\|^{-1}$ также верхняя треугольная матрица.

Заметим, что $\|R_2\|\|R_1\|^{-1}$ есть диагональная матрица. Действительно, с одной стороны, она верхняя треугольная матрица как произведение верхних треугольных. С другой стороны, $\|R_2\|\|R_1\|^{-1}$ должна быть и нижней треугольной, поскольку она ортогональная (как произведение двух ортогональных матриц $\|Q_2\|^{\mathrm{T}}\|Q_1\|^{-1}$) и ее обратная матрица совпадает с транспонированной.

Очевидно, что диагональная ортогональная матрица может иметь на диагонали лишь элементы, равные по модулю единице. Но диагональные элементы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$ положительны по условию, поэтому остается возможным лишь случай $\|R_2\|\|R_1\|^{-1}=\|E\|$, откуда и следует единственность разложения.

Теорема доказана.

Отметим, что, в силу теоремы 10.4.3. решение неоднородной системы линейных уравнений $\|A\|\|x\|=\|b\|$ может быть сведено к разложению невырожденной матрицы $\|A\|$ - на произведение верхней треугольной $\|R\|$ и ортогональной $\|Q\|$, поскольку в этом случае система преобразуется к легко решаемому виду $\|R\|\|x\|=\|Q\|^{\mathrm{T}}\|b\|$.

---

[1]) Обоснование существования такого разложения выходит за рамки данного курса. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь вопроса о его единственности.

§10.5. Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве

Пусть в E задано некоторое подпространство E_1. Рассмотрим множество $E_2 \subset E$ элементов x, ортогональных всем элементам из E_1.

Определение 10.5.1. В евклидовом пространстве E совокупность элементов x таких, что $(x, y) = 0$ для $\forall y \in E_1 \subset E$ называется *ортогональным дополнением* множества E_1.

Теорема 10.5.1. **Ортогональное дополнение $k-$мерного подпространства $E_1 \subset E^n$ является подпространством размерности $n-k$.**

Доказательство:

Пусть в E^n со стандартным скалярным произведением дан ортонормированный базис и пусть E_2 ортогональное дополнение к E_1. Выберем некоторый базис в E_1 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Тогда из условия ортогональности произвольного элемента $x \in E_2$ каждому элементу E_1 следует (см. теорему 7.4.1.), что $(x, g_i) = 0$; $i = [1, n]$ или же, в координатной форме,

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\xi_1 + \varepsilon_{12}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{1n}\xi_n = 0 \\ \varepsilon_{21}\xi_1 + \varepsilon_{22}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{2n}\xi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{k1}\xi_1 + \varepsilon_{k2}\xi_2 + \ldots + \varepsilon_{kn}\xi_n = 0 \end{cases}, \quad \text{где } \|g_j\|_e = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{j1} \\ \varepsilon_{j2} \\ \ldots \\ \varepsilon_{jn} \end{Vmatrix}; \quad j = [1, k] \quad \text{и} \quad \|x\|_e = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{Vmatrix}.$$

Эта однородная система линейных уравнений (неизвестные в которой есть компоненты элемента x), определяющая ортогональное дополнение E_2, имеет ранг k в силу линейной независимости элементов $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Тогда, по теореме 6.7.1., у нее есть n-k линейно независимых решений, образующих базис подпространства E_2.

Теорема доказана.

Убедимся теперь в справедливости следующего утверждения.

Теорема 10.5.2.

Если E_2 ортогональное дополнение подпространства $E_1 \subset E$, то E_1 является ортогональным дополнением E_2.

Доказательство:

Для каждого элемента $x \in E_2$ по условию следствия имеет место равенство $(y,x)=0$; $\forall y \in E_1$. Но это означает, что для каждого $y \in E_1$ справедливо $(x,y)=0$; $\forall x \in E_2$, то есть E_1 является ортогональным дополнением к E_2 в E.

Теорема доказана.

Определение 10.5.2.

В евклидовом пространстве E элемент y называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство E^*, если

$$1^\circ.\ y \in E^*$$
$$2^\circ.\ (x-y,z)=0 \quad \forall z \in E^*.$$

Теорема 10.5.3.

Если $E^* \subset E$ является $k-$мерным подпространством, то элемент y - ортогональная проекция $x \in E$ на E^*, существует и единственен.

Доказательство:

Если в E^* существует базис $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, то элемент $y \in E^*$ может быть представлен в виде $y = \sum_{i=1}^{k} \xi_i g_i$.

Условие $(x-y,z)=0 \quad \forall z \in E^*$ равносильно ортогональности $x-y$ каждому из базисных элементов подпространства E^*, то есть $(x-y, g_j)=0$; $\forall j=[1,k]$, и, следовательно, числа ξ_i, $i=[1,k]$ могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$(x-\sum_{i=1}^{k}\xi_i g_i, g_j)=0;\ \forall j=[1,k] \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{k}(g_i,g_j)\xi_i=(x,g_j);\ \forall j=[1,k].$$

Поскольку основная матрица этой системы (как матрица Грама набора линейно независимых элементов $g_1, g_2, ..., g_k$, см. следствие 10.3.1.) невырожденная, то по теореме 6.4.1. (Крамера) решение данной системы существует и единственно.

Теорема доказана.

Отметим, что если базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ в подпространстве E^* ортонормированный, то ортогональная проекция элемента x на E^* есть элемент вида $y = \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$.

Задача 10.5.1.

В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе система линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

задает подпространство E^*. Найти в этом базисе матрицу оператора ортогонального проектирования элементов E^4 на E^*.

Решение:

1°. За базис подпространства E^* можно взять пару элементов g_1 и g_2, координатные столбцы которых образуют фундаментальную систему решений для

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

например, $\|g_1\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$; $\|g_2\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

2°. Поскольку $\dim E^* = 2$, то размерность ортогонального дополнения E^* согласно теореме 10.5.1. также равна 2. За базис ортогонального дополнения E^* удобно принять элементы g_3 и g_4 такие, что $\|g_3\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Vmatrix}$; $\|g_4\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$, поскольку они

- линейно независимы и
- ортогональны каждому элементу из подпространства E^*, как образованные из коэффициентов, заданной в условии задачи, системы линейных уравнений.

3°. Элементы g_1, g_2, g_3 и g_4 линейно независимые по построению и образуют базис в E^4. Иначе говоря, каждый элемент из E^4 может быть представлен, и притом единственным образом, как линейная комбинация элементов g_1, g_2, g_3 и g_4.

Откуда следует, что искомый оператор $\hat{A}$ - ортогонального проектирования элементов E^4 на E^*, должен удовлетворять соотношениям

$$\hat{A}g_1 = g_1\,; \quad \hat{A}g_2 = g_2\,; \quad \hat{A}g_3 = o\,; \quad \hat{A}g_4 = o \quad .$$

В координатном представлении эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \left\| \hat{A} \right\| \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

и окончательно, воспользовавшись результатами §6.8., найдем, что

$$\left\| \hat{A} \right\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Замечание: геометрическая интерпретация ортогонального проектирования вполне очевидна, однако эта операция используется и в других приложениях.

Например, если E есть евклидово пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau\,,$$

а E^* - подпространство алгебраических многочленов $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \tau^{\kappa}$ степени не выше, чем n , то ортогональная проекция $x(\tau)$ - элемента E, на E^* может рассматриваться как наилучшее на $[\alpha, \beta]$ приближение $x(\tau)$ линейной комбинацией степенных многочленов. Подробно эта задача рассмотрена в §12.3.

§10.6. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве

Поскольку евклидово пространство является частным случаем линейного пространства, то все изложенные в разделе 8 утверждения справедливы и для линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве. Однако операция скалярного произведения позволяет выделять в евклидовых пространствах специфические классы линейных операторов, обладающих рядом полезных свойств.

Определение 10.6.1. Линейный оператор $\hat{A}^+$, заданный в евклидовом пространстве E, называется *сопряженным линейному оператору* $\hat{A}$, если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$.

Пример 10.6.1. В евклидовом пространстве, образованном бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)d\tau$, для линейного оператора $\hat{A} = \dfrac{d}{d\tau}$ (дифференцирования) сопряженным будет оператор $\hat{A}^+ = -\dfrac{d}{d\tau}$.

Действительно, согласно правилу интегрирования несобственных интегралов по частям имеют место равенства:

$$(\hat{A}x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau)d\tau = x(\tau)y(\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\frac{dy(\tau)}{d\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)(-\frac{dy(\tau)}{d\tau})d\tau = (x, \hat{A}^+ y).$$

Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство E^n с базисом $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ и выясним связь матриц линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ в этом базисе, предположив, что сопряженный оператор существует. Пусть матрицы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ имеют соответственно вид $\|\hat{A}\|_g$ и $\|\hat{A}^+\|_g$, а координатные представления элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ - $\|x\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ и $\|y\|_g = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_n \end{Vmatrix}$, тогда равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$

можно записать как

$$(\|\hat{A}\|_g \|x\|_g)^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g \|y\|_g, \qquad (10.6.1.)$$

где $\|\Gamma\|_g$ - матрица Грама выбранного в E^n базиса.

В силу соотношения $(\|A\|\|B\|)^{\mathrm{T}} = \|B\|^{\mathrm{T}} \|A\|^{\mathrm{T}}$ последнее равенство можно преобразовать к виду

$$\|x\|_g^{\mathrm{T}} (\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g) \|y\|_g = 0,$$

а поскольку это равенство справедливо при любых x и y, то, приняв во внимание невырожденность матрицы Грама и проведя рассуждения аналогичные использованным при доказательстве леммы 5.1.2., заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, - нулевая, а из соотношения

$$\|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g = \|O\| \quad \text{следует равенство} \quad \|\hat{A}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g,$$

которое, в частности, для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ имеет вид $\|\hat{A}^+\|_e = \|\hat{A}\|_e^{\mathrm{T}}$.

Лемма 10.6.1. **Если $(x, \hat{A}y) = 0$; $\forall x, y \in E$, то оператор $\hat{A}$ нулевой.**

Доказательство:

Пусть для $\forall x, y \in E$ справедливо равенство $(x, \hat{A}y) = 0$. Тогда оно будет верным и для $x = \hat{A}y$. Но из равенства $(\hat{A}y, \hat{A}y) = 0$ согласно определению 10.1.1. следует, что $\hat{A}y = o$. Наконец, в силу произвольности элемента y и определения 8.2.2., приходим к заключению, что $\hat{A} = \hat{O}$.

Лемма доказана.

Теорема 10.6.1. **Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве E^n имеет единственный сопряженный оператор.**

Доказательство:

Существование в E^n оператора $\hat{A}^+$, сопряженного оператору $\hat{A}$, следует из возможности построения матрицы вида $\|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{A}\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g$ для любого линейного оператора $\hat{A}$.

Покажем теперь единственность $\hat{A}^+$. Предположим, что $\hat{A}$ имеет два сопряженных оператора $\hat{A}^+$ и $\hat{A}^\times$. Это означает, что для $\forall x, y \in E$ одновременно выполнены равенства

$$(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) \quad \text{и} \quad (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^\times y).$$

Вычитая почленно, получим $(x, (\hat{A}^+ - \hat{A}^\times)y) = 0$, но тогда по лемме 10.6.1. $\hat{A}^+ - \hat{A}^\times = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема 10.6.2. **Для любых линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в E, имеет место равенство $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.**

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ имеет место $((\hat{A}\hat{B})^+ x, y) = (x, \hat{A}\hat{B}y) = (\hat{A}^+ x, \hat{B}y) = (\hat{B}^+\hat{A}^+ x, y)$. Это означает, что $(((\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+\hat{A}^+)x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$ и, в силу леммы 10.6.1., $(\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+\hat{A}^+ = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема 10.6.3. $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$.

Доказательство:

$\forall x, y \in E$ справедливы равенства $((\hat{A}^+)^+ x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = (\hat{A}x, y)$. Отсюда следует, что $((\hat{A} - (\hat{A}^+)^+)x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$ и, тогда по лемме 10.6.1. $\hat{A} - (\hat{A}^+)^+ = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема 10.6.4. **Ортогональное дополнение области значений оператора $\hat{A}$ в E^n является ядром оператора $\hat{A}^+$.**

Доказательство:

1°. Покажем вначале, что ядро оператора $\hat{A}^+$, обозначаемое через $\ker \hat{A}^+$, содержится во множестве Π - ортогональном дополнении области значений оператора $\hat{A}$.

Действительно, любой элемент $y \in \ker \hat{A}^+$, то есть такой, что $\hat{A}^+ y = o$, будет ортогонален элементу $b = \hat{A}x$, $x \in E^n$, поскольку $(b, y) = (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = 0$.

2°. Теперь сравним размерности $\ker \hat{A}^+$ и Π. С одной стороны, в силу невырожденности матрицы Грама и теоремы 8.4.3. ,

$$\dim(\ker \hat{A}^+) = n - \mathrm{rg}\| \hat{A}^+ \| = n - \mathrm{rg}(\| \Gamma \|^{-1} \| \hat{A} \|^{\mathrm{T}} \| \Gamma \|) = n - \mathrm{rg}\| \hat{A} \|^{\mathrm{T}} = n - \mathrm{rg}\| \hat{A} \|.$$

Но, с другой стороны, по теореме 8.4.1. размерность области значений $\hat{A}$ равна $\mathrm{rg}\| \hat{A} \|$, поэтому $\dim(\Pi) = n - \mathrm{rg}\| \hat{A} \|$ по теореме 10.5.1.

Наконец, из соотношений $\ker \hat{A}^+ \subset \Pi$ и $\dim(\ker \hat{A}^+) = \dim(\Pi)$ следует совпадение множеств $\ker \hat{A}^+$ и Π .

Теорема доказана.

Замечание: в использованных обозначениях теорема 10.6.4. допускает:

1°. Формулировку совпадающую с формулировкой теоремы 6.6.2., поскольку совместность системы $\hat{A}x = b$ означает, что элемент b принадлежит области значений линейного оператора $\hat{A}$.

2°. В предположении, что столбцы $\| y \|$ и $\| b \|$ суть координатные представления элементов E^m в ортонормированном базисе, также и нижеследующую формулировку:

Теорема 10.6.5. (Теорема Фредгольма)

Система линейных уравнений $\| A \| \| x \| = \| b \|$ совместна тогда и только тогда, когда каждое решение однородной сопряженной системы $\| A \|^{\mathrm{T}} \| y \| = \| o \|$ ортогонально столбцу свободных членов $\| b \|$.

§10.7. Самосопряженные операторы

Определение 10.7.1.

Линейный оператор $\hat{R}$, действующий в евклидовом пространстве E, называется *самосопряженным*, если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

Пример 10.7.1.

В евклидовом пространстве операторы вида $\hat{A} + \hat{A}^+$, $\hat{A}\hat{A}^+$ и $\hat{A}^+\hat{A}$ будут самосопряженными для любого линейного оператора $\hat{A}$.

Действительно, для оператора $\hat{A}^+\hat{A}$, например, имеем, что при $\forall x, y \in E$ $(\hat{A}^+\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^+\hat{A}y)$, откуда и следует его самосопряженность.

Свойства самосопряженных операторов сформулируем в виде следующих утверждений.

Лемма 10.7.1. **Линейный оператор $\hat{R}$ в E^n является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом ортонормированном базисе симметрическая.**

Доказательство:

Из определения 10.7.1. и формулы $\|\hat{R}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1}\|\hat{R}\|_g^{\mathrm{T}}\|\Gamma\|_g$ для некоторого ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ $\|\hat{R}^+\|_e = \|\hat{R}\|_e^{\mathrm{T}}$ и, следовательно, $\|\hat{R}\|_e = \|\hat{R}\|_e^{\mathrm{T}}$ в силу самосопряженности оператора $\hat{R}$.

Перейдем к другому ортонормированному базису $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. Матрица перехода $\|S\|$, как было показано в §10.4., ортогональная, то есть для нее $\|S\|^{-1} = \|S\|^{\mathrm{T}}$. Поэтому

$$\|\hat{R}\|_{e'}^{\mathrm{T}} = (\|S\|^{-1}\|\hat{R}\|_e\|S\|)^{\mathrm{T}} = (\|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{R}\|_e\|S\|)^{\mathrm{T}} = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{R}\|_e^{\mathrm{T}}(\|S\|^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} =$$
$$= \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{R}\|_e^{\mathrm{T}}\|S\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\hat{R}\|_e\|S\| = \|S\|^{-1}\|\hat{R}\|_e\|S\| = \|\hat{R}\|_{e'} \quad .$$

Лемма доказана.

Лемма 10.7.2. **Все собственные значения самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n вещественные числа.**

Доказательство:

Допустим противное: пусть характеристическое уравнение самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, где $\beta \neq 0$.

По теореме 8.6.2. оператор $\hat{R}$ в этом случае имеет двумерное инвариантное подпространство. То есть существует пара линейно независимых элементов x и y таких, что $\begin{cases} \hat{R}x = \alpha x - \beta y \\ \hat{R}y = \alpha y + \beta x \end{cases}$. Умножая эти равенства скалярно: первое - справа на y, второе - слева на x, получим

$$\begin{cases}(\hat{R}x,y)=\alpha(x,y)-\beta(y,y)\\(x,\hat{R}y)=\alpha(x,y)+\beta(x,x)\end{cases}.$$

Вычитая почленно второе равенство из первого и принимая во внимание самосопряженность $\hat{R}$, приходим к заключению, что $\beta(|x|^2+|y|^2)=0$. Однако это противоречит предположению о том, что $\beta\neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 10.7.3. **Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.**

Доказательство:

Пусть для самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеют место равенства $\hat{R}f_1=\lambda_1 f_1$ и $\hat{R}f_2=\lambda_2 f_2$, где ненулевые элементы f_1 и f_2 - собственные векторы оператора $\hat{A}$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$ - соответствующие им собственные значения. Умножив эти равенства соответственно: первое – скалярно справа на f_2, второе – скалярно слева на f_1, получим

$$\begin{cases}(\hat{R}f_1,f_2)=(\lambda_1 f_1,f_2)\\(f_1,\hat{R}f_2)=(f_1,\lambda_2 f_2)\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}(\hat{R}f_1,f_2)=\lambda_1(f_1,f_2)\\(f_1,\hat{R}f_2)=\lambda_2(f_1,f_2)\end{cases}.$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что $\hat{R}$ самосопряженный оператор, приходим к равенству $(\lambda_1-\lambda_2)(f_1,f_2)=0$, откуда $(f_1,f_2)=0$.

Лемма доказана.

Лемма 10.7.4. **Пусть E' - инвариантное подпространство самосопряженного оператора $\hat{R}$, действующего в E, и пусть E'' - ортогональное дополнение к E' в E. Тогда E'' также инвариантное подпространство оператора $\hat{R}$.**

Доказательство:

E' инвариантно для оператора $\hat{R}$, то есть $\forall x\in E':\hat{R}x\in E'$. Если E'' - ортогональное дополнение E', то для любых $x'\in E'$ и $x''\in E'':(x',x'')=0$.

Поскольку E' инвариантное подпространство $\hat{R}$, то будет также иметь место $(\hat{R}x',x'')=0$. Но, в силу самосопряженности $\hat{R}$ и $(x',\hat{R}x'')=0$. Последнее равенство означает, что $\hat{R}x''\in E''$; $\forall x''\in E''$, то есть и подпространство E'' будет инвариантным для оператора $\hat{R}$.

Лемма доказана.

Теорема 10.7.1. **Для любого самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{R}$.**

Доказательство:

Для самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n существует по крайней мере одно собственное значение λ_1. По лемме 10.7.2. это собственное значение вещественно. Из системы уравнений (8.5.1.) можно найти отвечающий λ_1 собственный вектор e_1. Без ограничения общности можно считать, что $|e_1| = 1$. Если n=1, то доказательство завершено.

Рассмотрим E^1 - линейную оболочку элемента e_1, являющуюся одномерным инвариантным собственным подпространством $\hat{R}$. Пусть E^{n-1} - ортогональное дополнение к E^1. Тогда по лемме 10.7.4., E^{n-1} инвариантно относительно оператора $\hat{R}$.

Рассмотрим теперь оператор $\hat{R}$ как действующий только в E^{n-1}. Тогда очевидно, что $\hat{R}$ - самосопряженный оператор, заданный в E^{n-1}, поскольку E^{n-1} инвариантно относительно $\hat{R}$ по лемме 10.7.4. и, кроме того, для $\forall x, y \in E^n$: $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$, в том числе и для $\forall x, y \in E^{n-1}$.

Применяя изложенные выше рассуждения, найдем новое собственное значение λ_2 и соответствующий ему собственный вектор e_2. Без ограничения общности можно считать, что $|e_2| = 1$. При этом λ_2 может случайно совпасть с λ_1, однако, из построения ясно, что $(e_1, e_2) = 0$. Если n=2, то доказательство завершено. Иначе рассмотрим E^2 - линейную оболочку $\{e_1, e_2\}$ и ее ортогональное дополнение E^{n-2}, найдем новое собственное значение λ_3 и соответствующий ему собственный вектор e_3 и т.д.

Аналогичные рассуждения проводим до исчерпания E^n.

Теорема доказана.

Следствие 10.7.1. **В базисе, построенном в теореме** 10.7.1., **самосопряженный оператор $\hat{R}$ имеет диагональную матрицу в E^n.**

Доказательство:

Вытекает из утверждения теоремы 8.5.1.

Следствие 10.7.2. **Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.**

Доказательство:

Следует из доказательства теоремы 10.7.1.

Следствие 10.7.3. **Если линейный оператор $\hat{R}$ в E^n имеет n попарно ортогональных собственных векторов, то он самосопряженный.**

Доказательство:

Пронормируем собственные векторы оператора $\hat{R}$ и примем их за ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора $\|\hat{R}\|_e$ диагональная и, следовательно, симметрическая. Тогда в силу леммы 10.7.1. линейный оператор $\hat{A}$ самосопряженный.

Следствие доказано.

Следствие 10.7.4. **Если $\|R\|$ симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица $\|Q\|$ такая, что матрица $\|D\| = \|Q\|^{-1}\|R\|\|Q\| = \|Q\|^{\mathrm{T}}\|R\|\|Q\|$ диагональная.**

Доказательство:

В ортонормированном базисе симметрическая матрица $\|R\|$ определяет самосопряженный оператор, поэтому в качестве искомой матрицы $\|Q\|$ можно выбрать матрицу перехода от данного ортонормированного базиса к ортонормированному базису, образованному собственными векторами этого оператора по схеме использованной в доказательстве теоремы 10.7.1.

Следствие доказано.

Теорема 10.7.2. **Два самосопряженных оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов в E^n тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.**

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть $\hat{A}a = \lambda a$ и $\hat{B}a = \mu a$, тогда $\hat{B}\hat{A}a = \lambda\hat{B}a = \lambda\mu a$; $\hat{A}\hat{B}a = \mu\hat{A}a = \lambda\mu a$ и, вычитая почленно, получим, что $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})a = o$. Поскольку a произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента в E^n, так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{O}$.

Докажем достаточность.

Пусть самосопряженные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют и пусть, кроме того, $\hat{A}a = \lambda a$. Рассмотрим здесь лишь случай, когда все собственные значения оператора $\hat{A}$ различны.

Покажем, что элемент евклидова пространства $b = \hat{B}a$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$. Действительно, в силу $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, имеем $\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b$.

Поскольку все собственные значения $\hat{A}$ кратности единица, то λ есть его собственное значение, отвечающее a и b одновременно. Поэтому $b = \kappa a$ и, поскольку $b = \hat{B}a$, также $\hat{B}a = \kappa a$. Значит, a - собственный вектор оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

§10.8. Ортогональные операторы

Определение 10.8.1. Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве E, называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из определения 10.8.1. следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними. Действительно,

$$|\hat{Q}x| = \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x,x)} = |x|; \quad \cos\psi = \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{|\hat{Q}x||\hat{Q}y|} = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \cos\varphi; \quad x, y \in E,$$

где φ - величина угла между элементами x и y, а ψ - величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$.

Теорема 10.8.1. **Ортогональный оператор $\hat{Q}$ имеет обратный $\hat{Q}^{-1}$, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^{+}$.**

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ по определению 10.8.1. $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$, отсюда следует, что $(x, \hat{Q}^{+}\hat{Q}y) = (x, y)$ или $(x, (\hat{Q}^{+}\hat{Q} - \hat{E})y) = 0$. Последнее равенство в силу леммы 10.6.1. означает, что $\hat{Q}^{+}\hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}$.

Из равенства $\hat{Q}^{+}\hat{Q}-\hat{E}=\hat{O}$ вытекает, что $\hat{Q}^{+}\hat{Q}=\hat{E}$, а из очевидного равенства $\hat{E}^{+}=\hat{E}$ и теоремы 10.6.2. получаем, что $\hat{Q}\hat{Q}^{+}=\hat{E}$. Наконец, по определению 8.2.8. получим $\hat{Q}^{-1}=\hat{Q}^{+}$.

Теорема доказана.

Следствие 10.8.1. **Ортогональный оператор $\hat{Q}$ невырожденный.**

Следствие 10.8.2. **В ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора ортогональная.**

Доказательство:

Пусть оператор $\hat{Q}$ ортогональный. Тогда из соотношения $\hat{Q}^{-1}=\hat{Q}^{+}$, по теореме 10.8.1. и в силу §8.3.(4°), в ортонормированном базисе справедливы равенства

$$\left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1}=\left\|\hat{Q}^{-1}\right\|_e=\left\|\hat{Q}^{+}\right\|_e=\left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}.$$

Но тогда $\left\|\hat{Q}\right\|_e^{-1}=\left\|\hat{Q}\right\|_e^{\mathrm{T}}$, что и означает, согласно определению 5.1.4., ортогональность матрицы $\left\|\hat{Q}\right\|_e$.

Следствие доказано.

В ряде приложений оказывается полезной

Теорема 10.8.2. (О полярном разложении) **Любой невырожденный линейный оператор $\hat{A}$ в E^n может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A}=\hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ ортогональный, а оператор $\hat{R}$ - самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.**

Доказательство:

1°. Покажем вначале, что самосопряженный оператор $\hat{A}^{+}\hat{A}$ (см. пример 10.7.1.) имеет только положительные собственные значения. Действительно, пусть $\hat{A}^{+}\hat{A}f=\lambda f$, тогда, с одной стороны, $(\hat{A}^{+}\hat{A}f,f)=(\hat{A}f,\hat{A}f)>0$ при $f\neq o$, а с другой, $(\hat{A}^{+}\hat{A}f,f)=(\lambda f,f)=\lambda(f,f)$, то есть $(\hat{A}f,\hat{A}f)=\lambda(f,f)$. Но тогда все $\lambda>0$ в силу невырожденности $\hat{A}$ и определения скалярного произведения.

2°. Пусть $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{A}^{+}\hat{A}$. Рассмотрим множество элементов $\hat{A}e_i$; $i=[1,n]$. Заметим, что

$(\hat{A}e_i, \hat{A}e_j) = (\hat{A}^+\hat{A}e_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = \lambda_i\delta_{ij}$; $i, j = [1,n]$. Но это означает, что $\left\{ e_i' = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\hat{A}e_i \ ; i = [1,n] \right\}$ - также базис и притом ортонормированный.

3°. Примем за искомый ортогональный оператор $\hat{Q}$ - оператор, переводящий ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в ортонормированный базис $\{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$, и убедимся, что в качестве $\hat{R}$ можно взять оператор $\hat{Q}^{-1}\hat{A}$.

Действительно, во-первых, имеет место равенство $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$. Во-вторых, из соотношений $\hat{R}e_i = \hat{Q}^{-1}\hat{A}e_i = \hat{Q}^{-1}\sqrt{\lambda_i}\, e_i' = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$; $i = [1,n]$ следует, что базисные элементы e_i, $i = [1,n]$ есть собственные векторы оператора $\hat{R}$, отвечающие положительным собственным значениям $\sqrt{\lambda_i}$, а значит, матрица $\|\hat{R}\|_e$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ диагональная и потому симметрическая. Тогда, в силу леммы 10.7.1., оператор $\hat{R}$ самосопряженный.

4°. Покажем, наконец, единственность разложения. Во введенных обозначениях справедливо равенство $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}^2$, поскольку из $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$ и $\hat{A}^+ = \hat{R}^+\hat{Q}^+$ следует, что

$$\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}^+\hat{Q}^+\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+\hat{Q}^{-1}\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+\hat{R},$$

то, в силу самосопряженности $\hat{R}$, $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}^2$.

Предположим, что существуют два различных самосопряженных оператора $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ с положительными собственными значениями такие, что $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}_1^2$; $\hat{A}^+\hat{A} = \hat{R}_2^2$ и $\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{O}$.

Заметим, что $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ по построению (см. 2°.) имеют общую систему собственных векторов, а потому они коммутируют. Но тогда, согласно §8.2., справедливы равенства

$$\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{R}_1^2 - \hat{R}_1\hat{R}_2 + \hat{R}_2\hat{R}_1 - \hat{R}_2^2 = (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}.$$

Из невырожденности и линейности $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ в силу теоремы 8.6.8. оператор $\hat{R}_1 + \hat{R}_2$ также невырожденный и поэтому из равенства $(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}$ следует $\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = \hat{O}$. Таким образом, $\hat{R}$- самосопряженный оператор, определяемый по $\hat{A}$ однозначно. Но $\hat{Q} = \hat{R}^{-1}\hat{A}$ и, значит, также определяется однозначно по $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Замечания: 1°. Теорема о полярном разложении является обобщением теоремы 5.5.2. о возможности представления аффинного преобразования плоскости в виде произведения двух операторов, первый из которых ортогональный, а второй - сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям, матрица которого диагональная.

2°. В случае вырожденного оператора $\hat{A}$ разложение, аналогичное указанному в теореме 10.8.2., с неотрицательными собственными значениями самосопряженного оператора $\hat{R}$ существует, но не единственно.

Задача 10.8.1. *В некотором ортонормированном базисе в E^2 линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$. Найти его полярное разложение.*

Решение:

1°. Выполним искомое разложение по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.8.2. Матрица оператора $\hat{A}^+\hat{A}$ в исходном ортонормированном базисе равна

$$\|\hat{A}^+\hat{A}\| = \|\hat{A}^+\|\|\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{Vmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы этого оператора равны соответственно

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 4; \quad \|f_1\| = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix}; \quad \|f_2\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{Vmatrix},$$

поэтому (сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы 10.8.2.) получим для элементов, образующих ортонормированные базисы $\{e_1, e_2\}$

$$\|e_1\| = \frac{\|f_1\|}{|f_1|} = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} \quad ; \qquad \|e_2\| = \frac{\|f_2\|}{|f_2|} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix}$$

и $\{e_1', e_2'\}$

$$\|e_1'\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \hat{A}e_1 \right\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix} \quad ; \quad \|e_2'\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \hat{A}e_2 \right\| = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}.$$

2°. Обозначив через $\|G\| = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix}$ и $\|F\| = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$ соответственно матрицы перехода от исходного базиса к базисам $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_1', e_2'\}$, и рассуждая так же, как при решении задачи 7.5.2., получим для матрицы ортогонального оператора $\hat{Q}$ выражение $\|\hat{Q}\| = \|G\|^{-1}\|F\|$.

Учитывая, что матрица $\|G\|$ ортогональная (как матрица перехода, связывающая два ортонормированных базиса), находим матрицу

$$\|\hat{Q}\| = \|G\|^{-1}\|F\| = \|G\|^{\mathrm{T}}\|F\| = \begin{Vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{Vmatrix},$$

которая в исходном ортонормированном базисе ортогональная.

3°. Поскольку $\hat{R} = \hat{Q}^{-1}\hat{A}$, то

$$\|\hat{R}\| = \|\hat{Q}^{-1}\|\|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\|^{-1}\|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\|^{\mathrm{T}}\|\hat{A}\| = \begin{Vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{Vmatrix},$$

и, следовательно, искомое полярное разложение имеет вид

$$\|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\|\|\hat{R}\| = \begin{Vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{Vmatrix}.$$