Раздел 12

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В данном разделе рассматриваются некоторые классы задач, имеющие важное значение в прикладных разделах математики, таких как: математическая физика, теория оптимального управления, математическая экономика, вычислительная математика и т.д., причем общим для этих задач является использование в процессе их решения понятий и методов различных разделов линейной алгебры.

§12.1. Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду

Задача отыскания базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, достаточно часто встречается в различных приложениях механики, физики, теории управления.

Приведение к диагональному виду квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ евклидова пространства E^n задан некоторый квадратичный функционал $\Phi(x)$. Рассмотрим задачу отыскания в E^n ортонормированного базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Принципиальная разрешимость подобной задачи для неортонормированного базиса следует из теоремы 9.2.1. Очевидно, что такой базис не единственный, и потому представляется интересным исследование возможности построения в E^n ортонормированного базиса, в котором данный квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Напомним предварительно (см. §9.2.), что квадратичный функционал в Λ^n может быть задан формулой $\Phi(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ki}\xi_k\xi_i=\|x\|_g^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|x\|_g$, в которой симметрическая матрица $\|\Phi\|_g$ преобразуется при переходе от базиса $\{g_1,g_2,...,g_n\}$ к базису $\{g_1',g_2',...,g_n'\}$ по правилу $\|\Phi\|_{g'}=\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|S\|$.

При доказательстве теоремы 9.2.1. использовалась математическая индукция в сочетании с методом *выделения полных квадратов* (называемым иногда методом *Лагранжа*), применение которого на практике малоудобно. Существенно более эффективным (с точки зрения минимизации затрат вычислительных усилий) представляется алгоритм, основой которого является

Теорема 12.1.1. **Для всякого квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе, существует ортонормированный базис, в котором этот функционал имеет диагональный вид [1]).**

Доказательство:

1°. Как было показано в §9.2., матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$ изменяется по правилу $\|\Phi\|_{e'}=\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_e\|S\|$, где $\|S\|=\|\sigma_{ij}\|$ - матрица перехода от базиса $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ к базису $\{e_1',e_2',\dots,e_n'\}$, то есть $e_k'=\sum_{s=1}^{n}\sigma_{sk}e_s, k=[1,n]$, а $\|\Phi\|_e$ - симметрическая матрица билинейного функционала, порождающего квадратичный функционал $\Phi(x)$.

2°. Поскольку матрица перехода $\|S\|$ от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная (см. §10.4.), то для нее справедливо равенство $\|S\|^{-1}=\|S\|^{\mathrm{T}}$. Откуда вытекает, что в рассматриваемом нами случае $\|\Phi\|_{e'}=\|S\|^{-1}\|\Phi\|_e\|S\|$.

3°. Формально симметрическая матрица $\|\Phi\|_e$ в ортонормированном базисе $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ определяет самосопряженный оператор (лемма 10.7.1) $\hat{\Phi}$, матрица которого в базисе $\{e_1',e_2',...,e_n'\}$ находится по формуле $\|\Phi\|_{e'}=\|S\|^{-1}\|\Phi\|_e\|S\|$ (теорема 8.3.2.).

---

[1]) Иногда задачу отыскания ортонормированного базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный вид, называют “приведением квадратичного функционала к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода”.

4°. Совпадение формул изменения матриц квадратичного функционала и самосопряженного оператора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому позволяет использовать в качестве базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ - ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{\Phi}$. Этот базис существует (см. теорему 10.7.1.) и в нем матрица оператора $\hat{\Phi}$ (а значит, и матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$) имеет диагональный вид, причем на главной диагонали расположены собственные значения самосопряженного оператора $\hat{\Phi}$.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 12.1.1. согласуется с утверждением следствия 10.7.4.

Определение 12.1.1. Линейный самосопряженный оператор $\hat{\Phi}$ называется *присоединенным* к квадратичному функционалу $\Phi(x)$ в E^n.

При этом очевидно выполнение равенства $\Phi(x) = (x, \hat{\Phi} x)$, $\forall x \in E^n$.

Используя теорему 12.1.1., можно упростить процедуру оценки экстремальных значений квадратичного функционала. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения максимума и минимума для отношения Релея.

Определение 12.1.2. Функционал $\rho(x) = \dfrac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)}$, заданный в E^n для некоторого самосопряженного оператора $\hat{A}$, называется *отношением Релея.*

Следствие 12.1.1. **В ортонормированном базисе максимальное (минимальное) значение отношения Релея равно максимальному (минимальному) собственному значению оператора $\hat{A}$, и это значение достигается на соответствующем собственном векторе этого оператора.**

Доказательство:

Поскольку при переходе к ортонормированному базису, образованному из собственных векторов самосопряженного оператора $\hat{A}$ (в силу теоремы 12.1.1.), справедливы соотношения

$$\rho(x) = \frac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2}{\sum_{i=1}^{n} \xi_i'^2},$$

то, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 9.5.1., получаем, что $\lambda_{\min} \le \rho(x) \le \lambda_{\max}$.

Следствие доказано.

Проиллюстрируем применение теоремы 12.1.1. на примере решения следующей задачи:

Задача 12.1.1. *При помощи ортогонального оператора привести к диагональному виду в E^3 квадратичный функционал* $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$.

Решение:

1°. Пусть исходный ортонормированный базис состоит из элементов $e_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, e_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, e_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Восстановим по квадратичному функционалу $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$ порождающий его симметричный билинейный функционал $B(x,y)$, использовав формулу $B(x,y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y))$ (см. определение 9.2.2.). В данном случае: $\Phi(y) = 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_1\eta_3 - 2\eta_2\eta_3$, а $\Phi(x+y) = 2(\xi_1+\eta_1)(\xi_2+\eta_2) + 2(\xi_1+\eta_1)(\xi_3+\eta_3) - 2(\xi_2+\eta_2)(\xi_3+\eta_3)$, и потому

$$B(x,y) = \xi_1\eta_2 + \xi_1\eta_3 - \xi_2\eta_3 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\xi_3 - \eta_2\xi_3, \text{ где } \|x\|_e = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} \text{ и } \|y\|_e = \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, матрица функционала $\Phi(x)$ имеет вид $\|\Phi\|_e = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

2°. Рассмотрим построенную симметрическую матрицу как задающую самосопряженный оператор $\hat{\Phi}$ в E^3 и найдем для него собственные значения. Составляем характеристическое уравнение 8.5.2. $\det\begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0$ или $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Оно имеет корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1$, которые и являются собственными значениями.

Заметим, что, если нас интересует только диагональный вид квадратичного функционала, то его можно написать, основываясь на следствии 10.7.1., как $\Phi(x) = -2\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2$ и на этом закончить решение задачи.

3°. В случае, когда требуется найти также и матрицу $\|S\|$ - матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к искомому, необходимо построить собственные векторы

оператора $\hat{\Phi}$. Для этого будем последовательно подставлять найденные собственные значения в систему (8.4.1.) и строить ее общие решения.

$$\text{Для } \lambda = -2 \text{ имеем: } \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что ранг основной матрицы этой системы равен 2, поскольку третье уравнение есть разность первых двух. Далее, действуя по схеме, описанной в §6.8. (метод Гаусса), получаем для компонентов собственного вектора систему условий

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 = -\xi_3 \\ \xi_1 + 2\xi_2 = \xi_3 \end{cases}.$$

Принимая ξ_3 за свободное неизвестное, получим собственный вектор $f_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$. Кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 2, и в силу следствия 10.7.2. ему должны отвечать два линейно независимых (но не обязательно ортогональных) собственных вектора. Конкретно, компоненты собственного вектора должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

из которых независимое только одно $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3$. Общее решение этой системы будет иметь вид $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Каждый столбец такого вида ортогонален f_1, но выбранные конкретные фундаментальные решения не ортогональны друг другу. Поэтому пару ортогональных собственных векторов, отвечающих $\lambda = 1$, сформируем из первого фундаментального решения и ортогональной ему линейной комбинации первого и второго. Условие ортогональности столбцов $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix}$, очевидно, есть $2\alpha + \beta = 0$. Откуда получаем $f_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $f_3 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$.

4°. Отнормировав базис $\{f_1, f_2, f_3\}$, получим $e_1' = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Vmatrix}$, $e_2' = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $e_3' = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{Vmatrix}$.

Матрица $\| S \| = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{Vmatrix}$ (перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e_1', e_2', e_3'\}$), столбцами которой являются координатные разложения элементов базиса $\{e_1', e_2', e_3'\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортогональная, то есть удовлетворяет соотношению $\| S \|^{-1} = \| S \|^{\mathrm{T}}$, что позволяет выписать формулы, выражающие “новые” координаты через “старые”.

Действительно (см. 7.3.), из соотношения $\begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \| S \| \begin{Vmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{Vmatrix}$ следует $\begin{Vmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{Vmatrix} = \| S \|^{-1} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}$ или окончательно

$$\begin{Vmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix}.$$

Приведение одним линейным оператором пары квадратичных функционалов, один из которых знакоопределенный, соответственно к каноническому и диагональному видам

Пусть в некотором базисе $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ линейного пространства Λ^n задана пара квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первый из которых, например, положительно определенный. Рассмотрим задачу отыскания базиса $\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет канонический, а функционал $\Psi(x)$ - диагональный вид.

Отметим, что условие положительной определенности одного из приводимых квадратичных функционалов существенно, поскольку в общем случае два различных квадратичных функционала одним линейным преобразованием к диагональному виду не приводятся [1])

Например, квадратичный функционал $\Phi(x) = A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2$ в Λ^2 можно привести к диагональному виду при помощи линейного оператора, сводящегося к повороту плоскости радиусов-векторов на угол α. При этом необходимо (см. доказательство теоремы 4.4.1.), чтобы α удовлетворяло уравнению $(A - C)\sin 2\alpha = 2B\cos 2\alpha$. Однако для пары квадратичных функционалов $\Phi_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ и $\Phi_2(x) = \xi_1\xi_2$ угла α, удовлетворяющего системе условий

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha = 0 \\ 0 = \cos 2\alpha \end{cases},$$

очевидно не существует.

Опишем теперь алгоритм приведения пары квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первый из которых положительно определенный, соответственно к каноническому и диагональному виду.

1°. Поскольку квадратичный функционал $\Phi(x)$ положительно определенный, то для него существует в Λ^n базис, в котором он имеет канонический вид, причем все его коэффициенты равны единице. Приведем этот функционал к данному виду каким-либо методом, например, выделив полные квадраты с последующей нормировкой. Одновременно тем же самым методом преобразуем также и квадратичный функционал $\Psi(x)$.

2°. Введем в Λ^n скалярное произведение по формуле $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$, превратив тем самым данное линейное пространство в евклидово E^n. Отметим, что в этом случае базис, в котором $\Phi(x)$ имеет канонический вид, ортонормированный.

3°. Построим затем третий, также ортонормированный базис, переход к которому выполняется при помощи матрицы $\|S\|$, приведя квадратичный функционал $\Psi(x)$ к диагональному виду по схеме, описанной в §12.1.1. При этом переходе квадратичный функционал $\Phi(x)$ не потеряет канонического вида, поскольку из условия $\|\Phi\|_e = \|E\|_e$ и ортогональности $\|S\|$ следует, что

[1]) Как и ранее, под "приведением квадратичного функционала к диагональному виду" понимается задача отыскания базиса (или построения матрицы перехода), в котором матрица квадратичного функционала диагональная.

$$\| \Phi \|_{e'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{e} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| E \|_{e} \| S \| = \| S \|^{\mathrm{T}} \| S \| = \| S \|^{-1} \| S \| = \| E \|_{e'} .$$

Таким образом, построен базис, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет канонический вид, а функционал $\Psi(x)$ - диагональный.

В заключение отметим, что матрица перехода к искомому ортонормированному базису есть произведение ортогональной матрицы $\| S \|$ и матрицы перехода, при котором положительно определенный квадратичный функционал приводится к диагональному виду.

Задача 12.1.2. *Найти замену переменных, приводящую квадратичные функционалы* $\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$ *и* $\Psi(x) = 4\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 + 6\xi_2^2$ *одновременно к диагональному виду.*

Решение:

1°. Исследуем квадратичные функционалы $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на знаковую определенность. Из критерия Сильвестра (теорема 9.3.2.) и неравенств

$$\det \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = 2 > 0 \quad ; \quad \det \begin{Vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{Vmatrix} = -40 < 0$$

заключаем, что $\Phi(x)$ - положительно определенный квадратичный функционал, в то время как функционал $\Psi(x)$ не является знакоопределенным.

2°. Приведем методом Лагранжа квадратичный положительно определенный функционал $\Phi(x)$ к каноническому виду. Поскольку

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2 ,$$

то, выполнив замену переменных $\begin{cases} \xi_1' = \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2' = \sqrt{2}\,\xi_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = \xi_1' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_2' \\ \xi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\xi_2' \end{cases}$, получим $\Phi(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2$ и, соответственно, $\Psi(x) = 4\xi_1'^2 + 4\sqrt{2}\xi_1'\xi_2' - 3\xi_2'^2$.

3°. Введение в Λ^2 скалярного произведения с единичной матрицей Грама означает, что координаты $\{\xi_1'; \xi_2'\}$ есть координаты евклидова пространства E^2 с базисом $\{e_1', e_2'\}$, где $\| e_1' \|_{e'} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$; $\| e_2' \|_{e'} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

Матрица квадратичного функционала $\Psi(x)$ в этом базисе $\|\Psi\|_{e'} = \begin{Vmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3 \end{Vmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -4$, а также ортонормированные собственные векторы $\|f_1\|_{e'} = \begin{Vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{Vmatrix}$ и $\|f_2\|_{e'} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{Vmatrix}$, которые примем за новый базис $\{e_1'', e_2''\}$.

4°. Матрица перехода от ортонормированного базиса $\{e_1', e_2'\}$ к ортонормированному базису $\{e_1'', e_2''\}$, в котором $\Phi(x) = \xi_1''^2 + \xi_2''^2$ и $\Psi(x) = 5\xi_1''^2 - 4\xi_2''^2$, ортогональная и имеет вид

$$\|S\| = \begin{Vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{Vmatrix}.$$

Откуда получаем, что $\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1' + \frac{1}{3}\xi_2' \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_2' \end{cases}$ и окончательно $\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2 \end{cases}$.

Если в задаче одновременного приведения пары квадратичных функционалов, один из которых положительно определенный, соответственно к диагональному и каноническому виду требуется найти лишь этот вид (а не формулы замены переменных), то возможно использование более простой схемы расчетов.

Допустим, что положительно определенный квадратичный функционал $\Phi(x)$ приведен при помощи матрицы перехода $\|S\|$ к каноническому виду, то есть $\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|\|S\| = \|E\|$. После того же преобразования матрица квадратичного функционала $\Psi(x)$ будет иметь вид $\|\Psi^*\| = \|S\|^{\mathrm{T}}\|\Psi\|\|S\|$.

Согласно теореме 12.1.1. в ортонормированном базисе для построения диагонального вида квадратичного функционала $\Psi(x)$ достаточно найти собственные числа самосопряженного оператора, матрица которого есть $\|\Psi^*\|$. Найдем выражение для этой матрицы, учитывающее связь между матрицами $\|\Phi\|$ и $\|S\|$.

Из равенства $\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|\|S\|=\|E\|$ следует, что $\|S\|=(\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|)^{-1}$. Тогда, используя правила обращения и транспонирования произведения матриц, перестановочность обращения и транспонирования, а также симметричность и невырожденность матрицы $\|\Phi\|$, имеем

$$\|\Psi^*\|=\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Psi\|\|S\|=((\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|)^{-1})^{\mathrm{T}}\|\Psi\|\|S\|=\left((\|\Phi\|)^{-1}(\|S\|^{\mathrm{T}})^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\|\Psi\|\|S\|=$$
$$=\|S\|^{-1}(\|\Phi\|^{\mathrm{T}})^{-1}\|\Psi\|\|S\|=\|S\|^{-1}(\|\Phi\|^{-1}\|\Psi\|)\|S\| \quad .$$

Полученное равенство означает, что матрица $\|\Psi^*\|$ может рассматриваться как результат преобразования матрицы линейного оператора $\|\Phi\|^{-1}\|\Psi\|$ при замене базиса с матрицей перехода $\|S\|$. Поскольку собственные значения линейного оператора не зависят от выбора базиса, то решение задачи сводится к определению собственных значений оператора, имеющего матрицу $\|\Phi\|^{-1}\|\Psi\|$.

Собственные векторы и собственные значения этого оператора находятся согласно §8.5. из системы линейных уравнений $(\|\Phi\|^{-1}\|\Psi\|)\|f\|=\lambda\|f\|$, которое можно преобразовать к виду $(\|\Psi\|-\lambda\|\Phi\|)\|f\|=\|o\|$. Условие существования ненулевых столбцов $\|f\|$:

$$\det(\|\Psi\|-\lambda\|\Phi\|)=0$$

есть алгебраическое уравнение относительно λ , корни которого и являются искомыми коэффициентами диагонального представления квадратичного функционала $\Psi(x)$.

Проиллюстрируем применение данного метода для нахождения диагонального вида квадратичных форм в задаче 12.1.2.

Имеем $\|\Phi\|=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{Vmatrix}$ и $\|\Psi\|=\begin{Vmatrix}4 & 8\\ 8 & 6\end{Vmatrix}$, то есть для определения коэффициентов диагонального представления квадратичного функционала $\Psi(x)$ необходимо решить уравнение

$$\det\left(\begin{Vmatrix}4 & 8\\ 8 & 3\end{Vmatrix}-\lambda\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{Vmatrix}\right)=0 \quad \text{или} \quad \det\begin{Vmatrix}4-\lambda & 8-\lambda\\ 8-\lambda & 3-3\lambda\end{Vmatrix}=0.$$

Поскольку данное уравнение имеет два корня $\lambda_1=5$ и $\lambda_2=-4$, то искомый диагональный вид для $\Psi(x)$ будет $\Psi(x)=5\xi_1'^2-4\xi_2'^2$, в то время как очевидно, что $\Phi(x)=\xi_1'^2+\xi_2'^2$.

§12.2. Классификация поверхностей второго порядка

Пусть в евклидовом пространстве E^3 с базисом $\left\{ e_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, e_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, e_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\}$ дано уравнение поверхности

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{33}\xi_3^2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{14}\xi_1 + 2\alpha_{24}\xi_2 + 2\alpha_{34}\xi_3 + \alpha_{44} = 0$$

второго порядка ($\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{k}|\alpha_{ik}| > 0$).

Квадратичную часть данного уравнения можно рассматривать как квадратичный функционал в E^3. Приведем его к диагональному виду ортогональным оператором по схеме, изложенной в §12.1. Получим уравнение

$$\lambda_1\xi_1'^2 + \lambda_2\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2 + 2\alpha'_{14}\xi'_1 + 2\alpha'_{24}\xi'_2 + 2\alpha'_{34}\xi'_3 + \alpha'_{44} = 0, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0,$$

для которого рассмотрим три следующих случая:

I. **Центральный случай**: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ или, что в силу теоремы 8.6.8. то же самое,

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

После переноса начала координат, устраняющего линейные слагаемые, получаем уравнение $\lambda_1\xi_1''^2 + \lambda_2\xi_2''^2 + \lambda_3\xi_3''^2 + \alpha''_{44} = 0$, для которого можно выделить следующие варианты:

если $\alpha''_{44} \neq 0$

1°. *Мнимый эллипсоид* при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1,2,3$;

2°. *Эллипсоид* при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1,2,3$;

3°. *Однополостный гиперболоид*
при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$;

4°. *Двуполостный гиперболоид*
при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$;

если $\alpha''_{44} = 0$

5°. *Мнимый конус* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3)$;

6°. *Конус* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3)$.

II. **Первый нецентральный случай**: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$.

После переноса начала координат приходим к уравнению $\lambda_1 \xi_1''^2 + \lambda_2 \xi_2''^2 + 2\alpha''_{34}\xi''_3 + \alpha''_{44} = 0$, для которого выделяем варианты:

если $\alpha''_{34} \neq 0$, то уравнение приводится к $\lambda_1 \xi_1'''^2 + \lambda_2 \xi_2'''^2 + 2\alpha'''_{34}\xi'''_3 = 0$, и тогда имеем:

7°. *Эллиптический параболоид* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

8°. *Гиперболический параболоид* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

если $\alpha''_{34} = 0$, $\alpha''_{44} \neq 0$, то имеем:

9°. *Мнимый эллиптический цилиндр* при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1,2$;

10°. *Эллиптический цилиндр* при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1,2$;

11°. *Гиперболический цилиндр* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

если же $\alpha''_{34} = 0$, $\alpha''_{44} = 0$, то:

12°. *Пара мнимых пересекающихся плоскостей*
при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

13°. *Пара пересекающихся плоскостей*
при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$.

III. **Второй нецентральный случай**: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

После переноса начала координат приходим к уравнению

$$\lambda_1 \xi_1''^2 + 2\alpha''_{24}\xi''_2 + 2\alpha''_{34}\xi''_3 + \alpha''_{44} = 0,$$

для анализа которого целесообразно перейти к новому ортонормированному базису по формулам:

$$\xi_1''' = \xi_1'' \quad ; \quad \xi_2''' = \frac{\alpha_{24}''\xi_2'' + \alpha_{34}''\xi_3''}{\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2}} \quad ; \quad \xi_3''' = \frac{\alpha_{34}''\xi_2'' - \alpha_{24}''\xi_3''}{\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2}}$$

(что, очевидно, является поворотом в плоскости $O\xi_2\xi_3$). В итоге получаем уравнение

$$\lambda_1\xi_1'''^2 + 2(\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2})\xi_2''' + \alpha_{44}'' = 0$$

и соответствующие ему варианты:

если $\alpha_{24}'' \neq 0$ или $\alpha_{34}'' \neq 0$, то после переноса начала координат имеем

14°. *Параболический цилиндр*;

если $\alpha_{24}'' = \alpha_{34}'' = 0$, то получаем

15°. *Пара мнимых параллельных плоскостей* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\alpha_{44}'')$;

16°. *Пара параллельных плоскостей* при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\alpha_{44}'')$;

если $\alpha_{24}'' = \alpha_{34}'' = \alpha_{44}'' = 0$

17°. *Пара совпадающих плоскостей* .

Замечания: 1°. Для классификации конкретной поверхности второго порядка необходимо сделать преобразование квадратной части уравнения к диагональному виду и выполнить переносы начала координат.

2°. Схема исследования кривых второго порядка на плоскости аналогична случаю, рассмотренному для поверхностей второго порядка.

§12.3. Аппроксимация функций многочленами

Задача построения наилучшего (в некотором смысле) приближения заданной на $[a,b]$ функции $f(\tau)$ линейной комбинацией некоторых других функций $g_0(\tau), g_1(\tau), g_2(\tau), \ldots, g_n(\tau), \ldots$, определенных и обладающих более привлекательными (с точки зрения удобства их исследования по сравнению с $f(\tau)$) свойствами на $\tau \in [a,b]$, достаточно часто встречается в различных приложениях.

Ввиду большого разнообразия постановок задач этого класса мы ограничимся рассмотрением лишь двух из них, имея целью только проиллюстрировать на примере их решения использование методов линейной алгебры.

Рассмотрим в качестве объекта аппроксимации непрерывную на [-1,1] функцию $f(\tau)$, а в качестве аппроксимирующих функций выберем одночлены вида $\{ g_k(\tau) = \tau^k \ , k = [0,n] \}$. Задача состоит в отыскании алгебраического многочлена, степени не выше n, $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \tau^k$, который наилучшим образом приближает функцию $f(\tau)$.

Предварительно заметим, что множество непрерывных на [-1,1] функций образует линейное пространство Λ, элементами которого являются и функции $g_k(\tau)$, причем Λ^* - линейная оболочка совокупности элементов $\{ g_k(\tau) = \tau^k \ , k = [0,n] \}$, есть n+1-мерное подпространство пространства Λ, в качестве базиса которой можно взять набор элементов $\{ g_k = g_k(\tau) \ , \quad k = [0,n] \}$.

Для количественной оценки качества аппроксимации одной функции другой введем в Λ скалярное произведение по формуле $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(\tau) y(\tau) d\tau$, и превратим его тем самым в евклидово пространство E. Тогда мера близости элементов $x(\tau)$ и $y(\tau)$ может быть оценена величиной

$$\rho = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x(\tau) - y(\tau))^2 d\tau}$$

(называемой иногда *расстоянием между* $x(\tau)$ *и* $y(\tau)$ *в* E), которая в силу свойств определенных интегралов равна нулю только в случае $x(\tau) = y(\tau)$ для $\forall \tau \in [-1,1]$.

Далее, для краткости будем опускать аргументы элементов в E, то есть будем обозначать функцию $f(\tau)$ как $f \in E$. Квадрат расстояния между элементами f и $\sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k$ в E равен $\rho^2 = (f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k)$. Подберем значения коэффициентов ξ_k, $k = [0,n]$ так, чтобы величина ρ^2 оказалась минимальной.

В силу билинейности скалярного произведения получаем

$$\rho^2 = (f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k g_k) = (f,f) - 2\sum_{k=0}^{n} \xi_k (f, g_k) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \xi_k \xi_i (g_k, g_i),$$

а из условий равенства нулю частных производных от ρ^2 по всем ξ_k, $k = [0,n]$, то есть из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i^* (g_k, g_i) = (f, g_k), \quad k = [0,n] \qquad (12.3.1.)$$

находятся оптимальные значения коэффициентов ξ_k^*, $k = [0,n]$, при которых ρ^2 минимально. Заметим, что данная система уравнений имеет единственное решение, поскольку ее основная матрица невырожденная, как матрица Грама базисных векторов.

Отметим формальное совпадение полученной формулы с утверждением теоремы 10.3.2., которое позволяет заключить, что оптимальные значения коэффициентов ξ_k^*; $k = [0,n]$ суть координаты элемента f в базисе $\{ g_k = g_k(\tau), k = [0,n] \}$ в том случае, когда f принадлежит линейной оболочке Λ^*.

Найдем минимальное значение ρ^2

$$\rho^2 = (f,f) - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* (f, g_k) + \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* \left(-(f, g_k) + \sum_{i=0}^{n} \xi_i^* (g_k, g_i) \right) =$$

$$= (f,f) - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* (f, g_k) = (f, f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* g_k).$$

Иначе говоря, полученное выражение равно нулю при $f = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* g_k$, а это означает, что избежать погрешности аппроксимации можно лишь в случае, когда элемент f принадлежит подпространству Λ^*.

Более содержательная оценка величины погрешности аппроксимации ρ^2 получается при подстановке в правую часть равенства $\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* g_k)$ конкретных оптимальных значений ξ_k^*, $k = [0,n]$, находимых при решении системы линейных уравнений 12.3.1. Заметим, что это сделать гораздо удобнее в случае ортонормированного базиса подпространства Λ^*.

Применение к неортогональному базису $\{ g_k = g_k(\tau) = \tau^k, \quad k = [0,n] \}$ процедуры ортогонализации Грама-Шмидта, использованной при доказательстве теоремы 10.2.1., дает ненормированную систему ортогональных многочленов вида:

$$e_0'(\tau) = 1; \quad e_1'(\tau) = \tau; \quad e_2'(\tau) = \tau^2 - \frac{1}{3}; \quad e_3'(\tau) = \tau^3 - \frac{3}{5}\tau; \quad \ldots; \quad e_n'(\tau) = \frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^2 - 1)^n,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

Поскольку все предыдущие вычисления делались для базиса $\{ g_k = \tau^k, k = [0,n] \}$ без учета его конкретного вида, то они будут и справедливы для ортогонального (но, вообще говоря, ненормированного) базиса

$$\{ e_k'(\tau) = \frac{d^k}{d\tau^k}(\tau^2 - 1)^k, k = [0,n] \}.$$

Для ортогонального базиса матрица Грама диагональная и, следовательно, система уравнений 12.3.1. $\sum_{i=0}^{n} \xi_i (e_k', e_i') = (f, e_k')$, $k = [0,n]$ будет иметь решения вида: $\xi_k^* = \frac{(f, e_k')}{(e_k', e_k')}$; $k = [0,n]$, а величина ρ^2: $\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^* e_k') = (f, f) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, e_k')^2}{(e_k', e_k')}$.

Если же, кроме того, базис $\{ e_k, k = [0,n] \}$ ортонормированный, то есть $(e_k, e_i) = \delta_{ki}$, $k, i = [0,n]$, тогда $\xi_k^* = (f, e_k)$; $k = [0,n]$ и $\rho^2 = |f|^2 - \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{*2}$.

Отметим, что значения ξ_k^*, $k = [0,n]$ - оптимальных коэффициентов аппроксимирующего многочлена формально совпадают:

1°. С решением задачи о нахождении ортогональной проекции элемента f евклидова пространства на подпространство Λ^*;

2°. Со значениями компонент разложения элемента, принадлежащего Λ^*, по ортонормированному базису $\{e_k, k=[0,n]\}$ (см. следствие 10.3.2.).

Таким образом, ортогональность системы элементов, используемой для аппроксимации, существенно упрощает вычисления. Вместе с тем, ортогонализация по методу Грама-Шмидта в случае бесконечномерного евклидова пространства может оказаться достаточно сложной процедурой.

Возможной альтернативой в процессе построения ортонормированной системы аппроксимирующих элементов является лемма 10.7.3., утверждающая, что собственные векторы *самосопряженного* оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Рассмотрим линейный оператор в евклидовом пространстве бесконечно дифференцируемых на [-1,1] функций, ставящий каждой такой функции в соответствие [1]) ее вторую производную, взятую с обратным знаком, и выясним, при каких условиях этот оператор будет самосопряженным. Интегрируя по частям, получим:

$$(\hat{A}x,y) = -\int_{-1}^{1}\frac{d^2x}{d\tau^2}y(\tau)d\tau = -\frac{dx}{d\tau}y(\tau)\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}d\tau.$$

Но, с другой стороны,

$$(x,\hat{A}y) = -\int_{-1}^{1}x(\tau)\frac{d^2y}{d\tau^2}d\tau = -x(\tau)\frac{dy}{d\tau}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{dx}{d\tau}\frac{dy}{d\tau}d\tau.$$

Поэтому для самосопряженности оператора $\hat{A}$ достаточно, чтобы $\frac{dx}{dt}y(t)\Big|_{-1}^{1} = x(t)\frac{dy}{dt}\Big|_{-1}^{1}$. Это условие выполняется, например, для функций, которые (так же как и их производные) имеют равные значения на концах отрезка [-1,1].

Найдем теперь собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$. Условие $\hat{A}x = \lambda x$ в данном случае сводится к дифференциальному уравнению $\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\lambda x$, $\lambda \geq 0$, решение ко-

---

[1]) При доказательстве теоремы 10.8.2. было показано, что оператор вида $\hat{S}^+\hat{S}$ есть самосопряженный и имеет неотрицательные собственные значения. Если $\hat{S} = \frac{d}{d\tau}$ и $\hat{S}^+ = -\frac{d}{d\tau}$ (при выполнении соответствующих граничных условий), то $\hat{A} = \hat{S}^+\hat{S} = -\frac{d^2}{d\tau^2}$.

торого дается формулой $x(\tau) = \alpha e^{\tau\sqrt{-\lambda}} + \beta e^{-\tau\sqrt{-\lambda}}$, где α и β - произвольные константы.

Из условий $x(-1) = x(1)$ и $\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{-1} = \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{1}$ получаем $e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$ или, по *формуле Эйлера* (см. приложение 3.), $\sin\sqrt{\lambda} = 0$. Откуда собственные значения будут:

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 \text{ , } k = 0,1,2,\ldots$$

и отвечающие им собственные векторы:

$$x_k(\tau) = \xi_k \cos\pi k\tau + \eta_k \sin\pi k\tau .$$

Числа ξ_k и η_k здесь произвольные (но не равные нулю одновременно для каждого k).

Таким образом, мы получили систему попарно ортогональных элементов, линейная оболочка которых является подпространством евклидова пространства непрерывных на $[-1,1]$ функций. Эта система (так же как система полиномов Лежандра) может быть использована для построения аппроксимирующих многочленов, однако в данном случае эти многочлены будут тригонометрическими.

Замечание: *полученные результаты приводят к естественному вопросу: можно ли уменьшить погрешность аппроксимации за счет увеличения n ? Или, иначе говоря, справедливо ли равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}(|f|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n}\xi_k^{*2}) = 0$?

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Рассмотрим, например, некоторое подпространство E^* евклидова пространства E, не имеющее базиса (то есть E^* бесконечномерное), и пусть существует ненулевой элемент $f \in E$, но $f \notin E^*$ такой, что $(f, g_k) = 0$; $\forall k$ (где все $g_k \in E^*$, а их любое конечное подмножество линейно независимо). В этом случае все аппроксимирующие коэффициенты равны нулю и данное предельное равенство, очевидно, не выполняется.

Условия возможности построения линейной комбинации из элементов множества $\{g_k \text{ , } k = 0,1,2,\ldots\}$, аппроксимирующей $\forall f \in E$ с любой наперед заданной точностью, выходят за рамки предмета линейной алгебры и изучаются в курсе математического анализа.