Приложение 1

СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

В §4.4. были перечислены конкретные типы линий второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены характерные свойства этих линий.

§Пр.1.1. Вырожденные линии второго порядка

К *вырожденным линиям второго порядка* будем относить все типы, перечисленные в первых четырех столбцах таблицы теоремы 4.4.1. Кратко опишем их свойства.

1°. Тип линии "Несовпадающие прямые"

Уравнение $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$ определяет пару пересекающихся прямых в системе координат $\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$. В свою очередь, уравнение $y'^2=a^2$ при $a\neq 0$ определяет пару параллельных прямых.

Пример Пр.1.1.1.

Пусть на плоскости $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ задана линия второго порядка $3x^2+4xy+y^2=0$.

Преобразовав ее уравнение к виду $(2x+y)^2-x^2=0$ (метод Лагранжа), получим две прямые $y=-x$ и $y=-3x$. (Рис. Пр.1.1.1.)

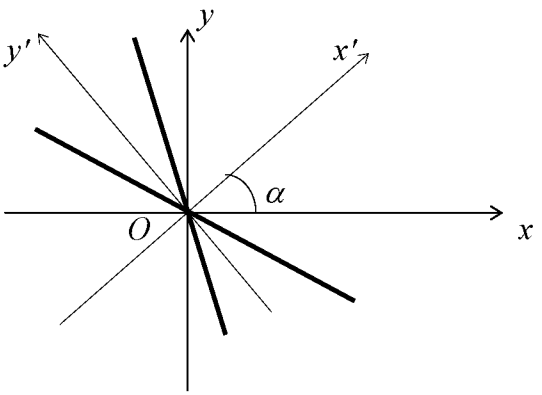

Рисунок Пр.1.1.1.

В данном случае $\Delta = -1 < 0$, а угол поворота осей системы координат $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

2°. Тип линии “Совпадающие прямые”

Уравнение $y'^2 = 0$ определяет прямую $y' = 0$ в системе координат $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$. Получается из типа линии 1° предельным переходом при $b \to +0$.

3°. Тип линии “Точки”

Уравнение $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ определяет единственную точку - начало координат системы $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$.

4°. Тип линии “Пустые множества”

Уравнения $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ и $y'^2 = -a^2$ не определяют на плоскости $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ никаких точек. Однако эти случаи иногда именуют “*мнимыми линиями*”.

§Пр.1.2. Эллипс и его свойства

Определение Пр.1.2.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a \geq b > 0$, называется *эллипсом*.

Определение Пр.1.2.2. Число $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $\left\| \begin{matrix} \pm \varepsilon a \\ 0 \end{matrix} \right\|$ называются *фокусами* эллипса.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* эллипса.

Свойства эллипса:

1°. Эллипс - ограниченная кривая: $|x| \le a$ и $|y| \le b$, что следует из записи канонического уравнения в форме $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$;

2°. Эллипс L обладает осевой симметрией относительно осей Ox и Oy, а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{Vmatrix} -x \\ y \end{Vmatrix} \in L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \in L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Vmatrix} x \\ -y \end{Vmatrix} \in L$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{Vmatrix} -x \\ -y \end{Vmatrix} \in L,$$

очевидных для канонического уравнения эллипса.

Свойства эллипса иллюстрирует рисунок Пр.1.2.1.

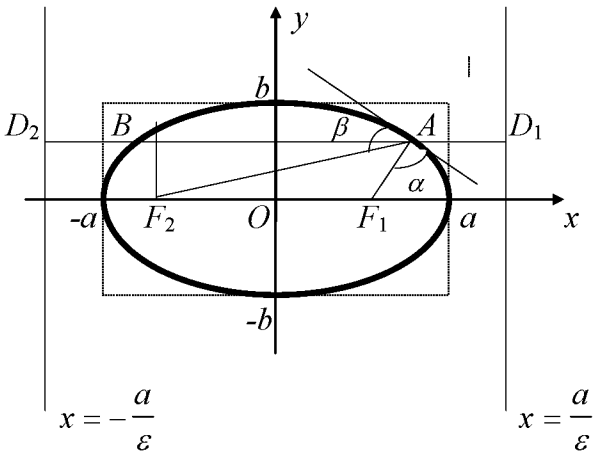

Рисунок Пр.1.2.1.

Будем обозначать через $\rho(P,Q)$ расстояние между геометрическими объектами P и Q, а через α и β обозначим углы между касательной и фокальными радиусами - отрезками F_1A и F_2A.

Теорема Пр.1.2.1. **Пусть $A=\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$ есть точка, принадлежащая эллипсу L, заданному каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:**

1°. $r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = a - \varepsilon x$; $r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = a + \varepsilon x$;

2°. $|\overrightarrow{F_1A}| + |\overrightarrow{F_2A}| = 2a$ **;**

3°. $\dfrac{\rho(A,F_1)}{\rho(A,D_1)} = \dfrac{\rho(A,F_2)}{\rho(A,D_2)} = \varepsilon$ **;**

4°. $\dfrac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,D_1)} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall M, M \in L$ **;**

5°. $|\overrightarrow{F_2B}| = p$**, где** $\overrightarrow{F_2B}$ **ортогонален оси** Ox **;** **6°.** $\angle\alpha = \angle\beta$ **.**

Доказательство:

1°. Имеем $r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}$; $r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2}$. Тогда, учитывая каноническое уравнение и определение эксцентриситета, получаем для i=1,2

$$r_i = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$$
$$= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} =$$
$$= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} =$$
$$= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x| .$$

Но поскольку $|x| \le a$ и $0 \le \varepsilon < 1$, то $a \pm \varepsilon x \ge 0$ и, следовательно,

$r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = a - \varepsilon x$; $r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = a + \varepsilon x$.

2°. Утверждение 2° очевидно в силу 1°.

3°. Далее $\dfrac{\rho(A,F_1)}{\rho(A,D_1)}=\dfrac{a-x\varepsilon}{\dfrac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon$; $\dfrac{\rho(A,F_2)}{\rho(A,D_2)}=\dfrac{a+x\varepsilon}{\dfrac{a}{\varepsilon}+x}=\varepsilon$.

4°. Справедливость 4° докажите самостоятельно.

5°. Наконец,

$$|\overrightarrow{F_2B}|=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\varepsilon^2}=\frac{b}{a}a\sqrt{1-\varepsilon^2}=b\frac{b}{a}=p.$$

6°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Пр.1.2.2.

Теорема доказана.

Проведение касательных к эллипсу

Теорема Пр.1.2.2.

Пусть $A=\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ **есть точка, принадлежащая эллипсу, заданному каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этому эллипсу, проходящей через точку** A **, имеет вид:**

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

Для эллипса из канонического уравнения получаем $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0$, то есть $y'(x_0)=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$. Но тогда $y-y_0=-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$, принимая во внимание, что $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$, окончательно получим $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек $y_0=0$, где уравнения касательных имеют вид $x=\pm a$.

Теорема доказана.

Доказательство свойства 6° теоремы Пр.1.2.1.:

Пусть касательная к эллипсу проведена через точку касания A, имеющую координаты $\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$. Тогда расстояние d_2 от фокуса F_2 с координатами $\begin{Vmatrix} -c \\ 0 \end{Vmatrix}$ до касательной равно (см. задачу 3.2.1.)

$$d_2 = \frac{1}{\Delta}\left| \frac{x_0(-c)}{a^2} + \frac{y_0(0)}{b^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta}\left| \frac{x_0 c}{a^2} + 1 \right| = \frac{1}{\Delta a}\left| x_0\varepsilon + a \right| = \frac{r_2}{\Delta a},$$

где $\Delta = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$.

Аналогично находим расстояние d_1 от фокуса F_1 с координатами $\begin{Vmatrix} c \\ 0 \end{Vmatrix}$ до касательной

$$d_1 = \frac{1}{\Delta}\left| \frac{x_0 c}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta a}\left| x_0\varepsilon - a \right| = \frac{r_1}{\Delta a}.$$

Поскольку углы α и β острые, то из равенств $\sin\alpha = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{\Delta a}$ и $\sin\beta = \frac{d_2}{r_2} = \frac{1}{\Delta a}$ следует $\angle\alpha = \angle\beta$.

Свойство 6° теоремы Пр.1.2.1. доказано.

Из теорем Пр.1.2.1. и Пр.1.2.2. следует возможность альтернативных формулировок свойств эллипса.

Фокальное свойство эллипса: эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство эллипса: эллипс (исключая случай окружности) есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и меньше единицы.

Оптическое свойство эллипса: касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы. (Любой луч света, исходящий из одного фокуса, после отражения в эллипсе проходит через другой фокус.)

Уравнение эллипса в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярную ось направим по линии, соединяющей его фокусы. Для произвольной точки A, лежащей на эллипсе (рис. Пр.1.2.1.), имеем

$$\rho = r_2 = a + x\varepsilon = a + \varepsilon(\rho\cos\varphi - a\varepsilon) = a + \varepsilon\rho\cos\varphi - a\varepsilon^2 .$$

Откуда

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a(1 - \varepsilon^2)$$

и окончательно $\rho = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$.

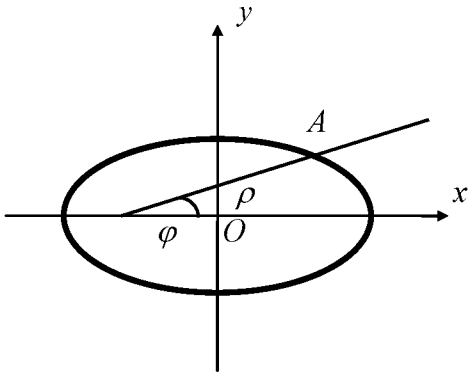

Рисунок Пр.1.2.2.

§Пр.1.3. Гипербола и ее свойства

Определение Пр.1.3.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0$ $b > 0$, называется *гиперболой*.

Определение Пр.1.3.2. Число $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Точки $\left\| \begin{matrix} \pm\varepsilon a \\ 0 \end{matrix} \right\|$ называются *фокусами* гиперболы.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

Число $p = \dfrac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы.

Свойства гиперболы:

1°. Гипербола - неограниченная кривая, существующая для $|x| \geq a$, что следует из записи канонического уравнения в форме $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$;

2°. Гипербола L обладает осевой симметрией относительно осей Ox и Oy, а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{matrix} \left\| \begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right\| \in L & \Leftrightarrow & \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L & \Leftrightarrow & \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L \\ & & \Updownarrow & & \\ & & \left\| \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L, & & \end{matrix},$$

очевидных для канонического уравнения гиперболы.

Через α и β обозначим углы между касательной и фокальными радиусами (рис. Пр.1.3.1.)

Определение Пр.1.3.2. Прямая $y = ux + v$ называется *асимптотой* для линии $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$u = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

и

$$v = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ux).$$

3°. Гипербола обладает асимптотами вида $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Свойства гиперболы иллюстрируются рис. Пр.1.3.1.

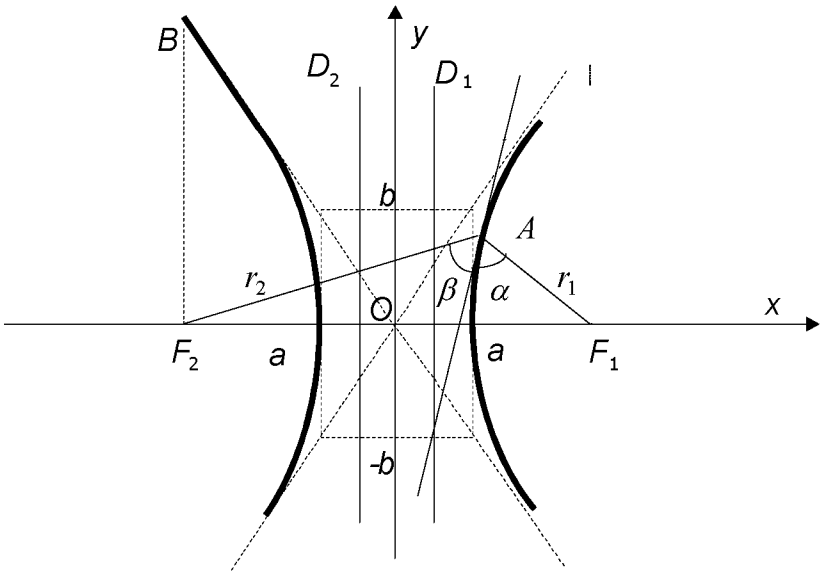

Рисунок Пр.1.3.1.

Действительно, $u = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{b}{ax}\sqrt{x^2-a^2} = \pm\dfrac{b}{a}$ и, кроме того,

$$v = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \mp \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}\mp x\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2-a^2)-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}\pm x} = -ab\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}\mp x} = 0.$$

Теорема Пр.1.3.1.

Пусть $A=\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$ есть точка, принадлежащая гиперболе L, заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

1°. Для правой ветви

$$r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = -a+\varepsilon x \quad ; \quad r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = a+\varepsilon x \quad ; \quad (x>a)\ .$$

Для левой ветви

$$r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = a-\varepsilon x \quad ; \quad r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = -a-\varepsilon x \quad ; \quad (x<-a) \quad ;$$

2°. $|r_1 - r_2| = 2a$; **3°.** $\dfrac{\rho(A,F_1)}{\rho(A,D_1)} = \dfrac{\rho(AF_2)}{\rho(A,D_2)} = \varepsilon$;

4°. $\dfrac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,D_1)} = \varepsilon \Rightarrow \forall M, M \in L$; **5°.** $|\overrightarrow{F_2B}| = p$;

6°. $\angle\alpha = \angle\beta$.

Доказательство:

1°. Доказательство аналогично доказательству теоремы Пр.1.2.1., поэтому ограничимся здесь лишь нахождением величин

$$r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}\ ;\ r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2}\ ,$$

используя каноническое уравнение и определение эксцентриситета.

Для $i = 1,2$ получаем

$$r_i = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} =$$
$$= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} =$$
$$= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} =$$
$$= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x|\,.$$

Но поскольку для гиперболы $|x| \geq a$ и $\varepsilon > 1$, то для правой ветви $r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = -a + \varepsilon x$; $r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = a + \varepsilon x$, а для левой - соответственно $r_1 = |\overrightarrow{F_1A}| = a - \varepsilon x$; $r_2 = |\overrightarrow{F_2A}| = -a - \varepsilon x$. Откуда и следует 2° и 3°.

Справедливость 4° докажите самостоятельно.

5°. Наконец, $|\overrightarrow{F_2B}| = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2\varepsilon^2 - a^2} = \dfrac{b}{a}a\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = b\dfrac{b}{a} = p$.

6°. Докажите это утверждение самостоятельно, по аналогии с доказательством свойства 6° теоремы Пр.1.2.1., используя также теорему Пр.1.3.1.

Теорема доказана.

Замечание о свойствах гиперболы:

Каноническое уравнение, изучаемой в курсе элементарной математики гиперболы $y=\frac{a}{x}$, получается путем следующей замены координат

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}.$$

Из теорем Пр.1.3.1. и Пр.1.2.2. следует возможность альтернативных формулировок свойств гиперболы.

Фокальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и больше единицы.

Оптическое свойство гиперболы: касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы. (Изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы.)

Проведение касательных к гиперболе

Теорема Пр.1.3.2.

Пусть $A=\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ есть точка, принадлежащая гиперболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой гиперболе, проходящей через точку А, имеет вид:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Для гиперболы из канонического уравнения получаем $\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0$, то есть $y'(x_0) = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$. Но тогда $y - y_0 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$, принимая во внимание, что $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, окончательно получим $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек $y_0 = 0$, где уравнения касательных имеют вид $x = \pm a$.

Теорема доказана.

Уравнение гиперболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox. (Рис. Пр.1.3.2.)

Имеем для произвольной точки A, лежащей на правой ветви гиперболы,

$$\rho = r_1 = -a + x\varepsilon = \\ = -a + \varepsilon(\rho\cos\varphi + a\varepsilon) = \\ = -a + \varepsilon\rho\cos\varphi + a\varepsilon^2 \quad .$$

Откуда $\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a(\varepsilon^2 - 1)$ и окончательно $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$.

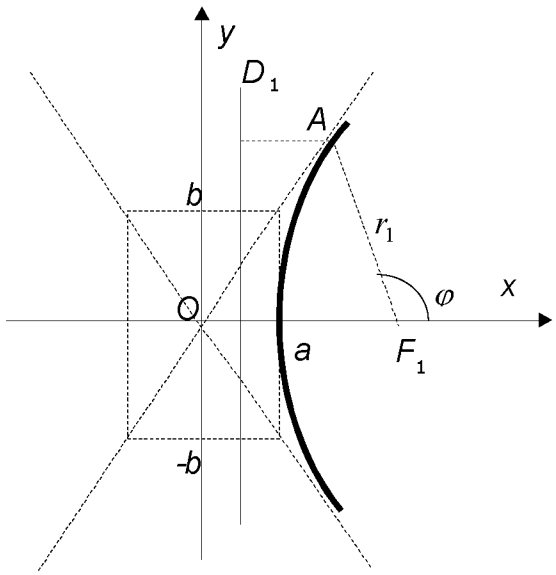

Рисунок Пр.1.3.2.

§Пр.1.4. Парабола и ее свойства

Определение Пр.1.4.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $y^2 = 2px$; $p > 0$, называется *параболой*.

Определение Пр.1.4.2. Точка $\left\| \begin{matrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{matrix} \right\|$ называется *фокусом* параболы.

Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы.

Число p называется *фокальным параметром* параболы.

Свойства параболы иллюстрируются рис. Пр.1.4.1., на котором через α обозначим угол между касательной и фокальным радиусом, а через β угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

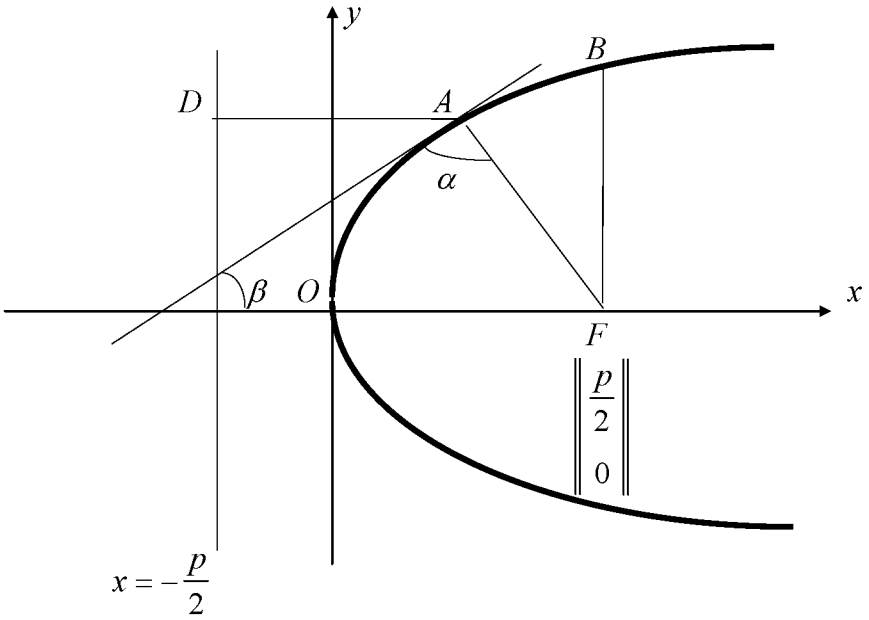

Рисунок Пр.1.4.1.

Свойства параболы:

1°. Парабола - неограниченная кривая, существующая для $\forall x \geq 0$;

2°. Парабола L обладает осевой симметрией относительно оси Ox, что вытекает из отношения

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L ,$$

очевидного для канонического уравнения параболы.

3°. Для параболы имеет место монотонное возрастание абсолютной величины ординаты при возрастании абсциссы, причем в нуле касательная к параболе вертикальна.

Теорема Пр.1.4.1.

Пусть $A=\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|$ есть точка, принадлежащая параболе L, заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

1°. $r = x + \dfrac{p}{2}$**;** **2°.** $\dfrac{\rho(A,F)}{\rho(A,D)} = 1$**;**

3°. $\dfrac{\rho(M,F)}{\rho(M,D)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \forall M, M \in L$**;** **4°.** $|\vec{FB}| = p$**;**

5°. $\angle\alpha = \angle\beta$**.**

Доказательство:

1°. Имеем $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, используя каноническое уравнение, получаем $r = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = |x + \frac{p}{2}|$, но поскольку $x \geq -\frac{p}{2}$, приходим сразу к справедливости утверждений 1° и 2°.

Справедливость 3° докажите самостоятельно.

4°. Наконец, $|\vec{FB}| = \sqrt{2p\frac{p}{2}} = p$.

5°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Пр.1.4.2.

Теорема доказана.

Замечание о свойствах параболы

Каноническое уравнение, изучаемой в курсе элементарной математики параболы вида $y = ax^2$, получается путем взаимного переименования координатных переменных.

Из теоремы Пр.1.4.1. следует возможность альтернативных формулировок свойств параболы.

Директориальное свойство параболы: парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

Оптическое свойство параболы: касательная в любой точке гиперболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс. (Каждый луч света, выходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы распространяется параллельно ее оси.)

Проведение касательных к параболе

Теорема Пр.1.4.2. **Пусть** $A=\begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}$ **есть точка, принадлежащая параболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой параболе, проходящей через точку** A**, имеет вид:**

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Для параболы из канонического уравнения получаем $2yy' = 2p$, то есть $y'(x_0) = \dfrac{p}{y_0}$, $y_0 \neq 0$. Но тогда $y - y_0 = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0)$, принимая во внимание, что $y_0^2 = 2px_0$, окончательно получим $yy_0 = p(x + x_0)$.

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точки $y_0 = 0$, где уравнение касательной $x = 0$.

Теорема доказана.

Доказательство свойства 5° теоремы Пр.1.4.1.:

Направляющий вектор касательной к параболе в точке A есть $\begin{Vmatrix} y_0 \\ p \end{Vmatrix}$, а вектор фокального радиуса - $\begin{Vmatrix} x_0 - \frac{p}{2} \\ y_0 \end{Vmatrix}$. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{y_0(x_0 - \frac{p}{2}) + py_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}\sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$$

Но, с другой стороны, косинус угла β между векторами $\begin{Vmatrix} y_0 \\ p \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ выражается той же формулой. Поскольку углы α и β острые, то они равны.

Теорема доказана.

Уравнение параболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, а полярную ось направим по линии, перпендикулярной директрисе и проходящей через ее фокус. (Рис. Пр.1.4.2.)

Для произвольной точки A, лежащей на параболе,

$$\rho = x + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \rho\cos\alpha + \frac{p}{2} = p + \rho\cos\varphi.$$

Откуда $\rho(1 - \cos\varphi) = p$

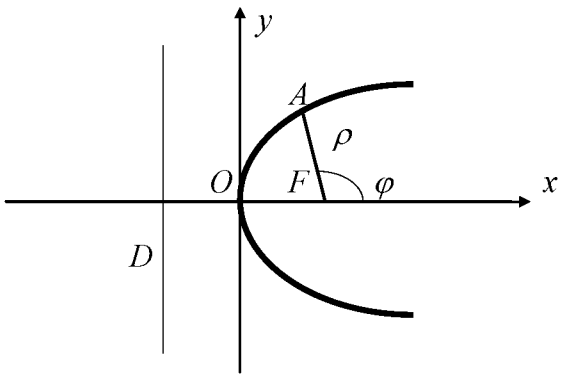

Рисунок Пр.1.4.2.

и окончательно $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$.