

Приложение 2

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В теореме 4.5.1. были перечислены конкретные типы поверхностей второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены основные свойства поверхностей этих типов.

§Пр.2.1. Вырожденные поверхности второго порядка

К вырожденным поверхностям второго порядка относятся типы, указанные в первой части таблицы формулировки теоремы 4.5.1.

В первых двух столбцах этой таблицы перечислены типы пустых множеств, а также объекты точечно-линейного типа, исследование которых полностью аналогично случаям, рассмотренным в приложении 1, в ортонормированной, канонической системе координат $\{\vec{O}, \overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}, \overset{\rightarrow}{e_3}\}$.

Первые три типа поверхностей, содержащиеся в третьей колонке таблицы, являются частными случаями цилиндрической поверхности, образующая которых параллельна прямой $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, а направляющими служат плоские кривые - эллипс, гипербола и парабола, соответственно расположенные в плоскости Oxy .

Описание свойств невырожденных поверхностей второго порядка будет также выполнено в ортонормированной системе координат $\{\vec{O}, \overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}, \overset{\rightarrow}{e_3}\}$.

В общем случае можно показать, что в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка. Однако для описания основных свойств невырожденных поверхностей второго порядка достаточно рассмотреть сечения, параллельные координатным плоскостям.

§Пр.2.2. Эллипсоид

Определение
Пр.2.2.1.

Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad : \quad a > 0, b > 0, c > 0, \text{ называется эллипсоидом.}$$

Свойства эллипсоида:

1°. Эллипсоид - ограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \leq a$; $|y| \leq b$; $|z| \leq c$.

2°. Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.

3°. В сечении эллипса плоскостью, ортогональной любой из осей координат, получается эллипс. Например, рассматривая секущую плоскость $z = z_0$, где $|z_0| < c$, получаем следующее уравнение линии сечения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} = 1 \\ z = z_0 \end{array} \right.,$$

являющейся эллипсом. (Рис.
Пр.2.2.1.)

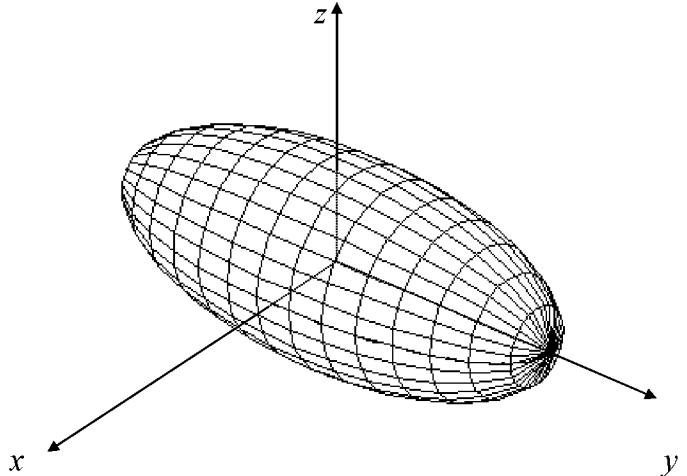


Рисунок Пр.2.2.1.

§Пр.2.3. Эллиптический параболоид

Определение
Пр.2.3.1.

Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad ; \quad a > 0, b > 0, \text{ называется эллиптическим параболоидом.}$$

Свойства эллиптического параболоида:

- 1°. Эллиптический параболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \geq 0$ и принимает сколь угодно большие значения.
- 2°. Эллиптический параболоид обладает
 - осевой симметрией относительно оси Oz ;
 - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .
- 3°. В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz , получается **эллипс**, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy - **парабола**. Например, рассматривая секущую плоскость $z = z_0 > 0$, получаем следующее уравнение плоской линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0 \end{cases}$$

являющейся эллипсом. (Рис. Пр.2.3.1.) С другой стороны, сечение плоскостью $y = y_0$ приводит к уравнению линии

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{y_0^2}{2b^2} \right), \\ y = y_0 \end{cases}$$

являющейся параболой. Для случая сечения плоскостью $x = x_0$ уравнение сечения имеет аналогичный вид.

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2 \left(z - \frac{x_0^2}{2a^2} \right). \\ x = x_0 \end{cases}$$

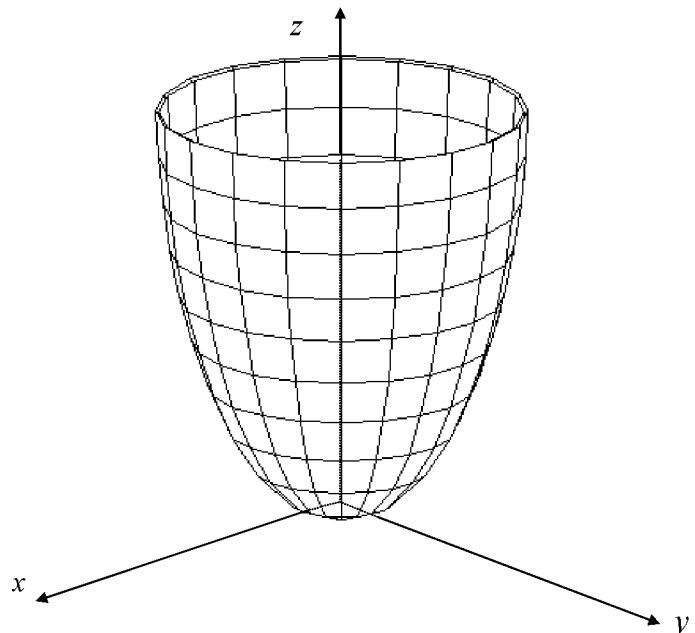


Рисунок Пр.2.3.1.

§Пр.2.4. Гиперболический параболоид

Определение
Пр.2.4.1.

Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$; $a > 0, b > 0$, называется **гиперболическим параболоидом**.

Свойства гиперболического параболоида:

- 1°. Гиперболический параболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что z - любое.
- 2°. Гиперболический параболоид обладает
 - осевой симметрией относительно оси Oz ;
 - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .
- 3°. В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси координат Oz , получается гипербола, а плоскостями ортогональными осям Ox или Oy - парабола. (Рис. Пр.2.4.1.)

Например, рассматривая секущую плоскость $z=z_0 > 0$, получаем следующее уравнение линии сечения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0 \end{cases}$$

являющейся гиперболой. При $z_0 < 0$ уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{-2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{-2z_0})^2} = -1 \\ z = z_0 \end{cases}$$

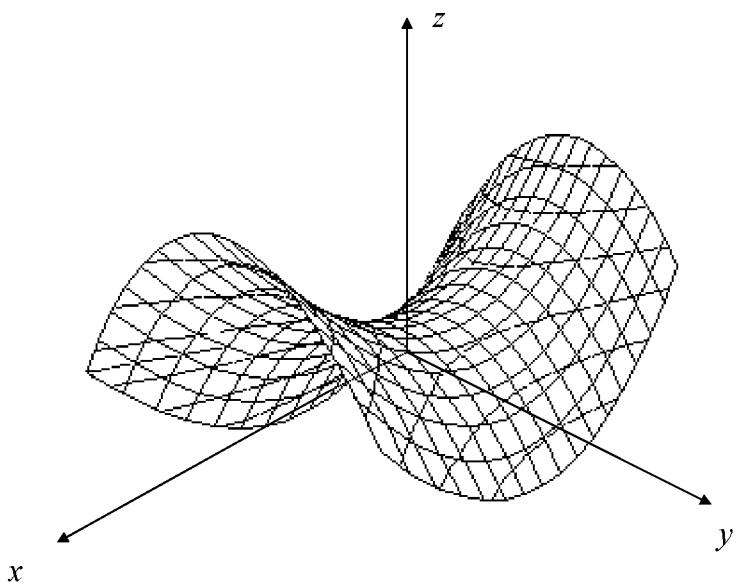


Рисунок Пр.2.4.1.

С другой стороны, при сечении гиперболического параболоида плоскостью $x=x_0$ получаем плоскую кривую

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2(z - \frac{x_0^2}{2a^2}), \\ x = x_0 \end{cases}$$

плоскостью $y=y_0$ уравнение аналогично и имеет вид

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2(z + \frac{y_0^2}{2b^2}), \\ y = y_0 \end{cases}$$

Из полученных уравнений следует, что гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вершина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, а ветви направлены противоположно, причем их плоскости взаимно перпендикулярны.

4°. Гиперболический параболоид имеет два семейства *прямолинейных образующих*.

Если записать уравнение данной поверхности в виде $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$, то можно прийти к заключению, что при любых значениях параметра α точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\alpha \\ \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\alpha \\ \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases},$$

также принадлежат и гиперболическому параболоиду,

поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение гиперболического параболоида.

Заметим, что для каждой точки гиперболического параболоида, существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на гиперболическом параболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора конкретных значений параметра α .

§Пр.2.5. Однополостный гиперболоид

Определение
Пр.2.5.1.

Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > 0, b > 0, c > 0$, называется *однополостным гиперболоидом*.

Свойства однополостного гиперболоида:

- 1°. Однополостный гиперболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \in (-\infty, +\infty)$.
- 2°. Однополостный гиперболоид обладает
 - центральной симметрией относительно начала координат;
 - осевой симметрией относительно всех координатных осей;
 - плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат Oz , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy - гипербола. (Рис. Пр.2.5.1.) Вывод уравнений для линий сечения аналогичен рассмотренным ранее случаям.

4°. Однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Записав уравнение данной поверхности в виде $\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, можно прийти к заключению, что при любых α и β , $|\alpha| + |\beta| > 0$ точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases},$$

будут принадлежать и однополостному гиперболоиду, поскольку почлененное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение однополостного гиперболоида.

Для каждой точки однополостного гиперболоида существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на однополостном гиперболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены путем подбора конкретных значений α и β .

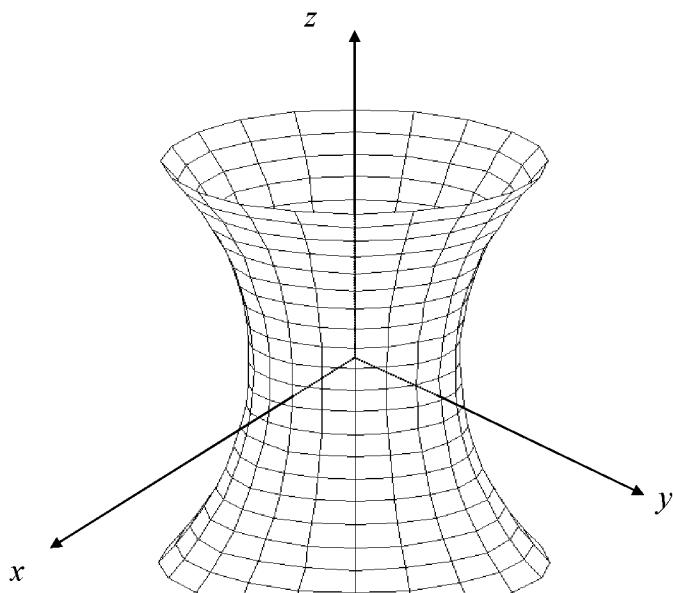


Рисунок Пр.2.5.1.

§Пр.2.6. Двуполостный гиперболоид

Определение
Пр.2.6.1.

Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > 0, b > 0, c > 0$, называется *двуполостным гиперболоидом*.

Свойства двуполостного гиперболоида:

- 1°. Двуполостный гиперболоид - неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \geq a$ и не ограничен сверху.

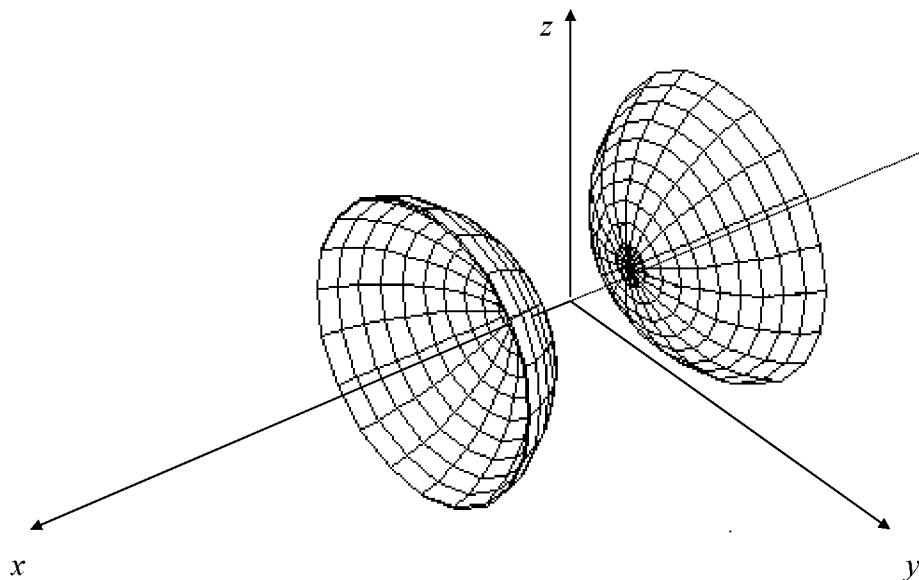


Рисунок Пр.2.6.1.

- 2°. Двуполостный гиперболоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- симметрией относительно всех координатных плоскостей.

- 3°. В сечении двуполостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат Ox , при $|x| > a$ получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Oy или Oz - гипербола. (Рис. Пр.2.6.1.)

§Пр.2.7. Поверхности вращения

Пусть некоторая кривая, расположенная в плоскости Oxz , имеет уравнение $F(x, z) = 0$. Если вращать эту кривую вокруг оси Oz , то каждая ее точка будет описывать окружность.

Определение
Пр.2.7.1.

Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, называется *поверхностью вращения*.

Пример
Пр.2.7.1.

К поверхностям вращения, например, относятся:

1°. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2°. Конус вращения

$$k^2 z^2 = x^2 + y^2.$$

Замечание: поверхности вращения линии второго порядка не всегда задаются уравнениями второго порядка.

Например, если вращать квадратную параболу $z^2 = 2px$ вокруг оси Ox , получается эллиптический параболоид вращения, однако при вращении этой же кривой вокруг оси Oz получится поверхность вращения, задаваемая уравнением вида $z^2 = \pm 2p\sqrt{x^2 + y^2}$ или $z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$.

Задача
Пр.2.7.1.

Составить уравнение поверхности вращения, получаемой при вращении линии $z^2 = 2px$ вокруг оси Ox .

Решение.

Зафиксируем на вращаемой линии точку с координатами $\begin{vmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{vmatrix}$. Линия, получаемая при вращении этой точки вокруг оси Ox в плоскости $x = x_0$, есть окружность радиуса z_0 , с уравнением $y^2 + z^2 = z_0^2$.

С другой стороны, $z_0^2 = 2px_0$, поэтому $y^2 + z^2 = 2px_0$. Наконец, в силу про-

извольности точки $\begin{vmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{vmatrix}$, выбранной на линии вращения, получаем, что урав-

нение поверхности вращения - эллиптического параболоида есть $y^2 + z^2 = 2px$.