Б. Л. Ван-дер-Варден

МЕТОД ТЕОРИИ ГРУПП В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Редакция журнала “Регулярная и хаотическая динамика”

1999

УДК 530.145

Библиотека «*Физика. Математические методы*»

Том V

Б. Л. Ван-дер-Варден. Метод теории групп в квантовой механике. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 232 стр. — ISBN 5-7029-0313-7

В книге крупнейшего алгебраиста современности изложены математические основы квантовой механики. Книга написана в 1932 г. в период интенсивного развития квантовой механики и давно стала классической. Она также содержит дополнения, написанные известным физиком Я. И. Френкелем.

Книга полезна студентам-физикам и математикам, аспирантам и научным сотрудникам.

ISBN 5-7029-0313-7

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»
http://www.uni.udm.ru/rcd

© Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999
© Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

Содержание

Предисловие редакции 6

Предисловие к русскому изданию 1937 года 8

Предисловие автора 9

Глава I. **Основы квантовой механики** 10
§ 1. Дифференциальное уравнение Шредингера 10
§ 2. Линейные операторы. Ортогональные системы 12
§ 3. Волновое уравнение для атома и молекулы 19
1. Вероятности переходов 22
§ 4. Электрон в поле с центральной симметрией 23
§ 5. Теория возмущений 28
§ 6. Момент импульса и бесконечно малые вращения 32

Глава II. **Группы и их представления** 37
§ 7. Линейные преобразования 37
§ 8. Группы 43
§ 9. Эквивалентность и приводимость представлений 49
§ 10. Представления абелевых групп. Примеры 54
§ 11. Теоремы однозначности 59
§ 12. Преобразования произведений по Кронекеру 61
§ 13. Матрицы, коммутирующие с данным представлением . . 65
§ 14. Представления конечной группы 69
1. Примеры 73
2. Обобщение 74
§ 15. Характеры 76

Глава III. **Группа вращений и группа Лоренца** 79
§ 16. Линейная группа $\mathfrak{c}_2$, унитарная группа $\mathfrak{u}_2$ и их отношение к группе вращений $\mathfrak{b}_3$ 79
§ 17. Бесконечно малые преобразования и представления группы вращения 84

§ 18. Примеры и применения 92
1. Приведение произведения представлений группы вращений $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$ 92
2. Применение соотношения (18.1) 95
3. Характер отражения 98
§ 19. Правила отбора и интенсивности 99
§ 20. Представления группы Лоренца 104
1. Группа $\mathfrak{c}_2$ и основное преобразование Лоренца 104
2. Отражение s и полная группа Лоренца 107
3. Спинорный анализ 109
4. Бесконечно малые преобразования 111

Глава IV. **«Вращающийся электрон»** 116
§ 21. Спин 116
§ 22. Волновая функция «вращающегося электрона» 118
§ 23. Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразования Лоренца 125
§ 24. Электрон в центральном поле по Дираку 130
§ 25. Задача многих электронов. Мультиплетная структура. Эффект Зеемана 134
1. Аномальный эффект Зеемана 139

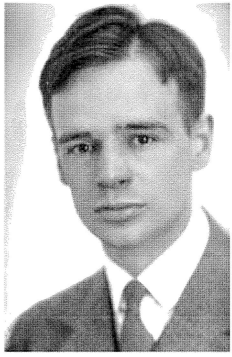
Глава V. **Перестановочная группа и запрет Паули** 143
§ 26. Резонанс одинаковых частиц 143
§ 27. Запрет Паули и периодическая система элементов 149
§ 28. Собственные функции атомов с учетом запрета Паули . 154
§ 29. Приближенное вычисление энергии 162
§ 30. Чисто спиновые функции и их преобразования при вращениях и перестановках 169

Глава VI. **Молекулярные спектры** 175
§ 31. Квантовые числа молекулы 175
§ 32. Ротационные уровни 180
§ 33. Учет спина 186
§ 34. Молекула с двумя одинаковыми ядрами 190
§ 35. Образование молекулы из двух атомов 191
§ 36. Замечания об определении энергии 196

Дополнения 201
1. Теория атома водорода по Фоку (к § 4) 201
2. Теория Заутера (к § 14, 23) 204
3. Спинорный анализ (к § 20) 214
4. Уровни с отрицательной энергией (к § 23) 219
5. Уравнение Брейта (к § 23) 222
6. Многоатомные молекулы (к разд. VI) 225

Предисловие редакции

Это переиздание книги крупнейшего алгебраиста двадцатого века Бартеля Лендерта Ван-дер-Вардена (Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996)) выходит уже после смерти ее автора. Голландский математик прожил длинную и интересную жизнь. Его учителями были Эмми Нетер и Гендрик де Фриз. В аспирантские годы он начал писать книгу по алгебре, в которой развивались идеи Э. Нетер, Гильберта, Дедекинда, Артина. Книга вышла в двух томах в 1930 г. и принесла ему мировую известность. Она до сих пор считается классическим учебником по алгебре и содержит результаты самого Ван-дер-Вардена по алгебраической теории полей, абстрактной алгебре, теории групп и теории Галуа. В последующем книга выдержала ряд переизданий (в том числе и на русском языке).



Спектр научных интересов Ван-дер-Вардена был очень широк. Он получил глубокие результаты в алгебраической геометрии, топологии, теории чисел, комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике. В течение всей своей жизни он интересовался историей науки. Результаты своих исследований он опубликовал в монографиях «Пробуждающаяся наука» (1954), «Геометрия и алгебра в античной цивилизации» (1983), «История алгебры» (1985).

Предлагаемая книга по квантовой механике, вышедшая в период бурного подъема этой науки, сохранила отпечаток той эпохи. До сих пор она выделяется глубиной математического изложения, полнотой анализа конкретных систем и содержит более сложные вопросы релятивистской теории. Эпоха обусловила также и то, что книга стала «устаревать» почти сразу после выхода. В русском переводе 1937 года, вышедшего под редакцией профессора Я. И. Френкеля, содержится ряд дополнений, в которых отражены основные результаты, полученные в течение пяти лет после выхода английского издания книги. Конечно, в течение более чем шестидесяти лет в квантовой механике получено огромное количество новых результатов, которые уже невозможно представить в виде отдельных дополнений и комментариев — они существенно превысили бы объем самой книги Ван-дер-Вардена. Это, видимо, и не имеет особого смысла, так как книга утратила бы свою изначальную свежесть

и привлекательность. Тем более что математические аспекты квантовой механики в последнее время привели к созданию совершенно новой области — квантовой математики. Следует упомянуть также о теории инвариантов Зейберга–Виттена, квантового хаоса, современных методах квантовой теории поля и теории струн и, особенно, о квантовых вычислениях.

Развитие последней области во многом связано с прогрессом компьютерных технологий и возможности реального использования в ближайшем будущем квантовых эффектов в микропроцессорных системах. Основная задача, состоящая в создании «квантового компьютера», требует совместных усилий инженеров, физиков, а также разработки принципиально новых алгоритмов, отличных от стандартных схем, реализуемых в машине Тьюринга.

Оживление и подъем интереса к квантовой механике и вызвал необходимость переиздания этой книги. Мы думаем, что представленная читателю возможность изучать математические аспекты квантовой механики «из первых рук» принесет больше пользы, чем чтение обширных и развернутых современных фолиантов, где сложно уловить основные пружины этой науки. Книга Б. Л. Ван-дер-Вардена до сих пор является классическим учебником по методам теории групп в квантовой механике.

Предисловие к русскому изданию 1937 года

Книга Ван-дер-Вардена при небольшом размере содержит значительный материал и представляет большой интерес для физиков-теоретиков с математическим уклоном и для математиков, желающих ознакомиться с математической структурой квантовой механики. Эта сжатость книги отнюдь не облегчает ее чтения, требующего от читателя достаточно высокой степени математического развития. Зато проработка ее может дать больше, чем чтение ряда других более объемистых книг по тому же вопросу (например, Вигнера и др.).

Книга Ван-дер-Вардена вышла еще в 1932 г. и потому не отразила ряда важных новейших успехов квантовой механики. Этот недостаток восполнен дополнением в переводе.

Ленинград, июль 1937 г. *Проф. Я. И. Френкель*

Предисловие автора

Квантово-механическое описание атомов и молекул с помощью уравнения Шредингера наталкивается на большие трудности, причиной которых является сложность проблемы. То, что можно, несмотря на это, сказать о собственных функциях и собственных значениях и что подтверждается спектроскопическими закономерностями, обусловлено свойствами симметрии волнового уравнения, а именно его инвариантностью относительно вращения, зеркального отображения и перестановок электронов (или ядер). Математическим способом исследования этих закономерностей является теория групп, в частности, теория представлений конечных и непрерывных групп.

Целью этой книги является возможно более простым способом изложить эти математические понятия и их физическое применение. Я старался пользоваться только простейшими вспомогательными средствами и в математических выкладках исходить из физической целесообразности. В частности, я учел новые работы Дирака, Слетера и других, которые позволили избежать довольно сложной теории представлений и вычисления характеров симметричной группы перестановок. Тот, кто захочет углубиться в теорию представлений симметричных групп и их связь с линейными группами, сможет воспользоваться книгой Вейля (H. Weyl) «Gruppentheorie und Quantenmechanik», 2 изд., Лейпциг, 1931 г. и оригинальными работами Г. Фробениуса (G. Frobenius), Шура (I. Schur) и Вейля (H. Weyl).

Основной частью книги, требующей большого внимания читателя, является теория представлений групп вращения в разделе III и основанная на ней теория спина в разделе IV.

Чтобы объяснить появление этой книги после вышедшей в прошлом году идентичной книги E. Wigner, «Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atome», Berlin, 1931, можно указать на последнюю главу о молекулах и на параграфы о группе Лоренца и релятивистском волновом уравнении (не говоря уже о различной обработке деталей).

В этой книге предполагается, что основы волновой механики и спектроскопии уже известны читателю, теория же групп и теория «вращающегося электрона» изложены в основном наново.

Лейпциг, январь 1932 г. *Б. Л. Ван-дер-Варден*