Глава первая

ЧИСЛА И МНОЖЕСТВА

Так как в книге используются логические и общематематические понятия, не очень знакомые начинающему математику, то мы должны начать с посвященного им короткого раздела. При этом мы не будем вдаваться в трудности, связанные с основаниями математики, а будем повсюду придерживаться «наивной точки зрения», избегая определений, содержащих порочный круг и приводящих к парадоксам. Более подготовленному читателю в этой главе следует лишь запомнить смысл символов $\in$, $\subset$, $\supset$, $\bigcup$, $\bigvee$ и $\{\ldots\}$, а все остальное можно пропустить.

§ 1. Множества

В качестве отправного пункта всех математических рассмотрений мы мыслим себе некоторые доступные представлению объекты, как-то: цифры, буквы или их комбинации. Свойство, которым обладает или не обладает каждый такой объект в отдельности, приводит к понятию *множества* или *класса*; *элементы множества* — это те самые объекты, которые обладают данным свойством. Символическая запись

$$a \in M$$

означает: a — элемент множества M. Пользуясь образным геометрическим языком, говорят также: a лежит в M. Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента.

Мы допускаем рассмотрение последовательностей и множеств чисел (или букв и т. д.) как элементов или объектов новых множеств (называемых иногда множествами второй ступени). Множества второй ступени снова могут служить элементами множеств более высокой ступени и т. д., однако мы остерегаемся употреблять понятия типа «множество всех множеств», так как они приводят к противоречиям; наоборот, мы будем строить новые множества из объектов некоторой заранее очерченной категории (которой новые множества еще не принадлежат).

Если все элементы некоторого множества N являются одновременно элементами множества M, то N называется *подмножеством* или *частью* множества M; пишут:

$$N \subseteq M.$$

Множество M называется *надмножеством* или *объемлющим множеством* множества N; пишут

$$M \supseteq N.$$

Из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$.

Пустое множество содержится в любом множестве.

Если одновременно все элементы из N содержатся в M и все элементы из M содержатся в N, то множества M и N называются *равными*; пишут

$$M = N.$$

Равенство означает также одновременное выполнение соотношений

$$M \subseteq N, \quad N \subseteq M.$$

Иначе: два множества равны, если они содержат одни и те же элементы.

Если $N \subseteq M$, но N не равно M, то N называется *собственным подмножеством* множества M, а M — *собственным надмножеством* множества N; пишут

$$N \subset M, \quad M \supset N.$$

Запись $N \subset M$ означает, таким образом, что все элементы из N лежат в M и что, кроме того, в M существует элемент, не лежащий в N.

Пусть теперь A и B — произвольные множества. Множество D, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и A, и B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается через

$$D = [A, B] = A \cap B.$$

Множество D является подмножеством как в A, так и в B, и любое множество с этим свойством содержится в D.

Множество V, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат по крайней мере одному из множеств A и B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается через

$$V = A \cup B.$$

Множество V содержит как A, так и B, и любое множество, обладающее этим свойством, содержит V.

Аналогично определяются пересечение и объединение произвольного множества Σ множеств A, B, ... Пересечение (т. е. множество элементов, принадлежащих всем множествам A, B, ... множества Σ) обозначается через

$$D(\Sigma) = [A, B, \ldots].$$

Два множества называются *непересекающимися*, если их пересечение пусто, т. е. если оба множества не содержат ни одного общего элемента.

Если множество задается перечнем своих элементов, скажем, множество M состоит из элементов a, b, c, то пишут

$$M = \{a,\ b,\ c\}.$$

Этот способ записи оправдывается тем, что, согласно определению равенства множеств, любое множество определяется заданием его элементов. Определяющее свойство, которое выделяет элементы множества M, состоит в следующем: совпадает ли тот или иной элемент с a, с b или с c.

§ 2. Отображения. Мощности

Если каждому элементу a некоторого множества M по какому-нибудь правилу сопоставляется единственный (вообще говоря, новый) объект $\varphi(a)$, то это сопоставление φ называется *функцией*. Если все объекты $\varphi(a)$ принадлежат некоторому множеству N, то сопоставление $a \longmapsto \varphi(a)$ называется также *отображением из M в N*. Элемент $\varphi(a)$ называется *образом* элемента a, а a называется *прообразом* элемента $\varphi(a)$. Образ $\varphi(a)$ определяется элементом a однозначно, но a не обязательно однозначно определяется элементом $\varphi(a)$. Вместо $\varphi(a)$ иногда пишут кратко φa.

Отображение множества M в множество N называется *сюръективным* или отображением из M *на* N, если каждый элемент из N имеет по крайней мере один прообраз.

Отображение множества M в множество N называется *взаимно однозначным* или *инъективным*, если каждый образ φa обладает ровно одним прообразом a.

Если отображение φ множества M в множество N инъективно и сюръективно, т. е. является взаимно однозначным отображением множества M на множество N, то существует *обратное отображение* φ^{-1}, которое каждому элементу b множества N сопоставляет тот элемент из M, образом которого является b:

$$\varphi^{-1}b = a, \quad \text{если} \quad \varphi a = b.$$

Говорят, что множества M и N *равномощны* или *имеют одинаковую мощность*, если существует взаимно однозначное отображение из M на N.

Пример. Сопоставим каждому числу n число $2n$; тогда получится взаимно однозначное отображение множества всех натуральных чисел на множество всех четных натуральных чисел. Таким образом, множество всех натуральных чисел равномощно с множеством всех четных (натуральных) чисел.

Как показывает приведенный пример, вполне может оказаться, что множество равномощно со своим собственным подмножеством. В последующих параграфах мы увидим, что ничего подобного нельзя встретить, рассматривая «конечные» множества.

§ 3. Натуральный ряд

Будет предполагаться известным множество натуральных чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

также будут предполагаться известными следующие основные свойства этого множества (*аксиомы Пеано*):

I. 1 — натуральное число.

II. Для каждого числа[1]) a существует вполне определенное последующее число a^+ в множестве натуральных чисел.

III. Всегда

$$a^+ \neq 1,$$

т. е. нет числа с последующим числом 1.

IV. Из $a^+ = b^+$ следует $a = b$, т. е. каждое число либо вовсе не является последующим ни для какого числа, либо является последующим точно для одного числа.

V. «*Принцип индукции*». Каждое множество натуральных чисел, которое содержит число 1 и вместе с каждым содержащимся в нем числом a содержит последующее число a^+, содержит все натуральные числа.

На свойстве V основан метод доказательства с помощью *индукции*. Для того чтобы доказать, что некоторым свойством E обладают все числа, доказывают сначала, что им обладает число 1, а затем доказывают его для произвольного числа n^+ при «индуктивном предположении», что число n свойством E уже обладает. В силу аксиомы V множество чисел, обладающих свойством E, должно содержать множество всех чисел.

Сумма двух чисел. Каждой паре чисел x, y можно единственным образом сопоставить натуральное число, обозначаемое через $x+y$, так, чтобы оказались выполненными следующие условия:

(1) $x+1 = x^+$ для каждого x;

(2) $x+y^+ = (x+y)^+$ для каждого x и для каждого y[2]).

В силу этого определения мы можем в дальнейшем писать вместо a^+ также $a+1$. Имеют место следующие правила:

---

[1]) «Число» будет означать пока «натуральное число».

[2]) Доказательство этого и всех остальных предложений данного параграфа читатель найдет в книге: Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1950, гл. 1.

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ («Закон ассоциативности сложения»).
(4) $a+b=b+a$ («Закон коммутативности сложения»).
(5) Из $a+b=a+c$ следует $b=c$.

Произведение двух чисел. Каждой паре чисел x, y можно единственным образом сопоставить натуральное число, обозначаемое через $x\cdot y$ или через xy, так, чтобы выполнялись следующие условия:

(6) $x\cdot 1=x$,
(7) $x\cdot y^{+}=x\cdot y+x$ для каждого x и для каждого y.

Имеют место правила:

(8) $ab\cdot c=a\cdot bc$ («Закон ассоциативности умножения»).
(9) $a\cdot b=b\cdot a$ («Закон коммутативности умножения»).
(10) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ («Закон дистрибутивности»).
(11) Из $ab=ac$ следует $b=c$.

Больше и меньше. Если $a=b+u$, то пишут $a>b$ или $b<a$. Доказывается, что:

(12) Для любых двух чисел a, b имеет место одно и только одно из соотношений: $a<b$, $a=b$, $a>b$.
(13) Из $a<b$ и $b<c$ следует $a<c$.
(14) Из $a<b$ следует $a+c<b+c$.
(15) Из $a<b$ следует $ac<bc$.

Решение u уравнения $a=b+u$ (единственное в силу (5)) в случае $a>b$ обозначается через $a-b$. Вместо «$a<b$ или $a=b$» пишут кратко $a\leqslant b$. Соответствующим образом объясняется запись $a\geqslant b$.

Далее, имеет место следующая важная теорема:

Каждое непустое множество натуральных чисел содержит наименьшее число, т. е. такое число, которое меньше всех остальных чисел множества.

На этой теореме основана *вторая форма индукции*. Для того чтобы доказать, что некоторым свойством E обладают все числа, доказывают, что им обладает произвольное число n, предполагая «по индукции», что оно выполнено для всех чисел, меньших n. (В частности, этим свойством обладает число $n=1$, так как нет чисел, меньших единицы; следовательно, здесь предположение индукции отпадает[1]). Доказательство по индукции должно, конечно, быть построено так, чтобы оно охватывало и случай $n=1$,

---

[1]) Высказывание «Все A обладают свойством E» будет считаться истинным, даже если никаких A нет вообще. Аналогично высказывание «Из E следует F» (где E и F — некоторые свойства, которыми могут обладать или не обладать известные объекты x) рассматривается как истинное, если ни один из объектов x не обладает свойством E. Все это находится в соответствии со сделанным замечанием, согласно которому пустое множество содержится в каждом множестве.

Целесообразность такого словоупотребления (в разговорной речи, вероятно, необычного) следует из того, что только при нем высказывание «Из E следует F» без исключений переводится в «Из не F следует не E».

иначе оно недостаточно.) Тогда свойством E обладают все числа. Действительно, в противном случае множество чисел, не обладающих свойством E, было бы непустым и если n — наименьшее число в этом множестве, то получилось бы, что все числа, меньшие n, обладают свойством E, что противоречит доказанному.

Наряду с «доказательством методом индукции» в обеих ее формах существует «*определение* (или построение) *методом индукции*». Допустим, что мы хотим сопоставить каждому натуральному числу x некоторый новый объект $\varphi(x)$ и при этом заранее задана «система рекуррентных определяющих соотношений», которые связывают значение $\varphi(n)$ с предшествующими значениями $\varphi(m)$ $(m < n)$. Предполагается, что эти соотношения единственным образом определяют $\varphi(n)$, как только задаются все $\varphi(m)$ при $m < n$, которые уже удовлетворяют заданным соотношениям[1]). Простейший случай состоит в следующем: для $m = n^+$ значение $\varphi(n^+)$ выражается через $\varphi(n)$, а для $m = 1$ значение $\varphi(1)$ задается непосредственно. Примерами служат соотношения (1), (2), соответственно (6), (7), с помощью которых выше были определены сумма и произведение. Мы утверждаем теперь: *при сделанных предположениях существует одна и только одна функция* $\varphi(x)$, *значения которой удовлетворяют заданным соотношениям.*

Доказательство. Под отрезком $(1, n)$ натурального ряда мы подразумеваем совокупность всех натуральных чисел, не превосходящих n. Прежде всего мы утверждаем: на каждом отрезке $(1, n)$ существует одна и только одна функция $\varphi_n(x)$, определенная на числах x этого отрезка, которая удовлетворяет заданным соотношениям. Это утверждение верно для отрезка $(1, 1)$, а также для любого отрезка $(1, n^+)$ при условии, что оно верно для отрезка $(1, n)$, потому что благодаря рекуррентным соотношениям значение $\varphi(1)$ и значения $\varphi(m) = \varphi_n(m)$ $(m \leqslant n)$ однозначно определяют значение $\varphi(n^+)$. Таким образом, утверждение верно для каждого отрезка $(1, n)$. Мы получаем, следовательно, ряд функций $\varphi_n(x)$. Каждая функция $\varphi_n(x)$ определена на $(1, n)$ и, равным образом, на каждом меньшем отрезке $(1, m)$; но там она также удовлетворяет определяющим соотношениям и потому совпадает с функцией $\varphi_m(x)$. Следовательно, любые две функции $\varphi_n(x)$, $\varphi_m(x)$ совпадают для тех значений x, на которых они одновременно определены.

Искомая же функция $\varphi(x)$ должна быть определена на всех отрезках $(1, n)$ и вместе с тем удовлетворять определяющим соотношениям, т. е. совпадать с функциями φ_n. Такая функция φ существует и притом только одна: ее значение $\varphi(x)$ является об-

---

[1]) Это предположение включает в себя и допущение, согласно которому $\varphi(1)$ определяется самими соотношениями, потому что нет чисел, предшествующих единице.

щим значением всех функций $\varphi_n(x)$, которые определены для числа x. Тем самым теорема доказана.

Мы очень часто будем пользоваться «*построением методом индукции*».

Задача 1. Пусть свойство E имеет место, во-первых, для $n=3$, а во-вторых, имея место для числа $n \geqslant 3$, оно имеет место и для $n+1$. Доказать, что свойство E имеет место для всех чисел $\geqslant 3$

Присоединяя символы $-a$ (отрицательные целые числа) и 0, можно расширить натуральный ряд до области *целых чисел*. Чтобы было удобнее распространить смысл символов $+$, $\cdot$, $<$ на эту область, целесообразно представить целые числа парами натуральных чисел следующим образом:

натуральное число a — парой $(a+b,\ b)$,

нуль — парой $(b,\ b)$,

отрицательное число $-a$ — парой $(b,\ a+b)$, где всюду b — произвольное натуральное число.

Каждое число может быть представлено многими символами $(a,\ b)$, но каждый символ $(a,\ b)$ определяет одно и только одно целое число, а именно:

натуральное число $a-b$, если $a>b$,

число 0, если $a=b$,

отрицательное число $-(b-a)$, если $a<b$.

Определим:

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d),$$

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(ac+bd,\ ad+bc),$$

$$(a,\ b)<(c,\ d) \text{ или } (c,\ d)>(a,\ b), \text{ если } a+d<b+c.$$

Без труда проверяется: во-первых, эти определения не зависят от выбора символов в левой части, — нужно лишь, чтобы числа были одни и те же; во-вторых, выполняются правила (3), (4), (5), (8), (9), (10), (12), (13), (14), а также (15) для $c>0$; в-третьих, в расширенной области уравнение $a+x=b$ всегда имеет решение и притом единственное (решение снова будет обозначаться через $b-a$); в-четвертых, $ab=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$ или $b=0$ [1]).

Задача 2. Провести доказательство.

Задача 3. То же, что в задаче 1, но с заменой числа 3 на число 0.

Из элементарных свойств целых чисел мы привели здесь лишь те, что важны для дальнейшего. По поводу определения дробей, а также свойств делимости целых чисел см. главу 3.

---

[1]) По поводу несколько иного введения отрицательных чисел и нуля см. Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1950, гл. 4.

§ 4. Конечные и счетные множества

Множество, равномощное с отрезком натурального ряда (т. е. с множеством натуральных чисел, не превосходящих некоторого числа n), называется *конечным*. Пустое множество также называется конечным.

Проще говоря, множество называется конечным, если его элементы можно занумеровать натуральными числами от 1 до n так, чтобы различные элементы имели различные номера и чтобы все номера от 1 до n были использованы. В соответствии с этим элементы конечного множества A можно обозначить через $a_1, \ldots, a_n$:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Задача 1. С помощью метода индукции по n доказать, что всякое подмножество конечного множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ конечно.

Каждое множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Например, множество всех целых чисел, как это сейчас будет показано, бесконечно.

Основная теорема о конечных множествах гласит: *Каждое конечное множество не может быть равномощно с каким-либо собственным объемлющим множеством.*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению теоремы, существует некоторое отображение конечного множества A на его собственное надмножество B. Пусть элементы множества A обозначены через $a_1, \ldots, a_n$, а их образы — через $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$. Среди последних содержатся все элементы $a_1, \ldots, a_n$ и, кроме того, еще по крайней мере один элемент, который мы обозначим через a_{n+1}.

Для $n = 1$ противоречие очевидно: единственный элемент a_1 не может иметь два различных образа a_1, a_2.

Невозможность существования отображения φ с указанными выше свойствами будем считать доказанной для $n-1$; докажем ее теперь для n.

Можно считать, что $\varphi(a_n) = a_{n+1}$, потому что если это не так, т. е.

$$\varphi(a_n) = a' \qquad (a' \neq a_{n+1}),$$

то a_{n+1} имеет другой прообраз a_i:

$$\varphi(a_i) = a_{n+1},$$

и вместо отображения φ можно построить другое, сопоставляющее элементу a_n элемент a_{n+1}, элементу a_i элемент a', а в остальном совпадающее с φ.

Подмножество $A' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ отображается функцией φ на некоторое множество $\varphi(A')$, которое получается из $\varphi(A) = B$ отбрасыванием элемента $\varphi(a_n) = a_{n+1}$.

Множество $\varphi(A')$ содержит $a_1, \ldots, a_n$ и, следовательно, является собственным надмножеством множества A' и вместе с тем его взаимно однозначным образом. В силу предположения индукции это невозможно.

Из этой теоремы прежде всего следует, что множество никогда не может быть равномощно с двумя различными отрезками натурального ряда, потому что в противном случае эти отрезки были бы равномощны и при этом обязательно один из них содержался бы в другом. Таким образом, любое конечное множество A равномощно с одним и только одним отрезком $(1, n)$ натурального ряда. Однозначно определяемое таким способом число n называется *числом элементов* множества A; оно может служить мерой мощности в этом случае.

Во-вторых, из теоремы следует, что произвольный отрезок натурального ряда неравномощен со всем натуральным рядом. Таким образом, ряд натуральных чисел бесконечен. Множество, равномощное с множеством натуральных чисел, называется *счетно бесконечным*. Элементы счетно бесконечного множества могут быть перенумерованы так, что любое натуральное число появится в качестве номера ровно один раз.

Конечные и счетно бесконечные множества объединяются названием *счетные* множества.

Задача 2. Доказать, что число элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств равно сумме чисел элементов объединяемых множеств. (Индукция с помощью рекуррентных формул (1), (2) из § 3.)

Задача 3. Доказать, что число элементов в r попарно непересекающихся множествах из s элементов равно rs. (Индукция с помощью рекуррентных формул (6), (7) из § 3.)

Задача 4. Доказать, что каждое подмножество натурального ряда счетно. Вывести отсюда: множество счетно тогда и только тогда, когда его элементы можно перенумеровать так, чтобы различным элементам соответствовали различные номера.

Пример несчетного множества. Множество всех счетно бесконечных последовательностей натуральных чисел несчетно. То, что оно не является конечным, проверить легко. Если бы оно было счетно бесконечным, то каждая последовательность обладала бы некоторым номером, и каждому номеру i соответствовала бы последовательность вида

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots$$

Построим последовательность чисел

$$a_{11}+1, \quad a_{22}+1, \ \ldots$$

Она также должна иметь некоторый номер, скажем, номер j. Тогда

$$a_{j1}=a_{11}+1; \quad a_{j2}=a_{22}+1 \quad \text{и т. д.;}$$

в частности,

$$a_{jj} = a_{jj} + 1;$$

получили противоречие.

Задача 5. Доказать, что множество целых чисел (т. е. множество, состоящее из всех положительных и отрицательных чисел и нуля) счетно бесконечно. Точно так же счетно бесконечно множество четных чисел.

Задача 6. Доказать, что мощность счетно бесконечного множества не меняется при добавлении к этому множеству конечного или счетно бесконечного множества элементов.

Объединение счетного множества счетных множеств снова является счетным.

Доказательство. Обозначим данные множества через $M_1, M_2, \ldots$, а элементы множества M_i — через $m_{i1}, m_{i2}, \ldots$

Существует лишь конечное число элементов m_{ik}, для которых $i+k=2$; аналогично, существует лишь конечное число элементов m_{ik}, для которых $i+k=3$, и т. д. Перенумеруем сначала все элементы, для которых $i+k=2$ (например, по возрастающим значениям i), затем (с помощью последующих чисел) — элементы, для которых $i+k=3$, и т. д. При этом каждый элемент m_{ik} получит некоторый номер и различные элементы будут иметь различные номера. Отсюда следует утверждение.

§ 5. Разбиение на классы

Знак равенства удовлетворяет следующим условиям:

$a=a$;

из $a=b$ следует $b=a$;

из $a=b$ и $b=c$ следует $a=c$.

То же самое выражается следующими словами: отношение $a=b$ *рефлексивно, симметрично* и *транзитивно*. Если между элементами произвольного множества определено отношение $a \sim b$ (т. е. для любой пары элементов a, b либо имеет место $a \sim b$, либо нет), подчиненное аксиомам:

1) $a \sim a$,

2) из $a \sim b$ следует $b \sim a$,

3) из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$,

то оно называется *отношением эквивалентности*.

Пример. В области целых чисел назовем два числа эквивалентными, если их разность делится на 2. Очевидно, аксиомы выполняются.

Если задано какое-либо отношение эквивалентности, то мы можем объединить все элементы, эквивалентные данному элементу a, в один *класс* K_a. Элементы в таком классе попарно эквивалентны, так как из $a \sim b$ и $a \sim c$ в силу аксиом 2) и 3) следует $b \sim c$. Кроме того, все элементы, эквивалентные какому-либо элементу произвольно фиксированного класса, принадлежат этому классу,

так как из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$. Таким образом, класс задается каждым своим элементом: если вместо a выбрать другой элемент b того же самого класса, то получится, что $K_a = K_b$. Следовательно, мы можем выбрать каждый элемент b в качестве *представителя* данного класса.

Если же мы начнем построение с такого элемента b, который не принадлежит рассматриваемому классу (т. е. не эквивалентен элементу a), то придем к классу K_b, у которого нет общих элементов с классом K_a; в противном случае имели бы $c \sim a$ и $c \sim b$, откуда следовало бы $a \sim b$ и $b \in K_a$. В этом случае классы K_a и K_b не пересекаются.

Классы эквивалентности целиком покрывают данное множество, потому что каждый элемент a принадлежит некоторому классу, а именно — классу K_a. Таким образом, *множество распадается на попарно непересекающиеся классы*. В нашем последнем примере это класс четных и класс нечетных чисел.

Как мы видели, $K_a = K_b$ тогда и только тогда, когда $a \sim b$. Вводя классы эквивалентности вместо элементов, мы можем отношение эквивалентности $a \sim b$ заменить отношением равенства $K_a = K_b$.

Обратно, если задано разбиение множества на попарно непересекающиеся классы, то мы можем положить по определению: $a \sim b$, если a и b лежат в одном классе. Очевидно, такое отношение удовлетворяет аксиомам 1), 2), 3).