Глава четвертая

ВЕКТОРНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В настоящей главе вводятся некоторые основные понятия линейной алгебры. Их изучение в более общей форме будет продолжено в главе 12.

§ 19. Векторные пространства

Пусть даны: 1) тело K, элементы a, b, ... которого будут называться *коэффициентами* или *скалярами*; 2) модуль (т. е. аддитивная абелева группа) $\mathfrak{M}$, элементы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, ... которого будут называться *векторами*; 3) умножение $\boldsymbol{x}a$ векторов на скаляры, удовлетворяющее следующим требованиям:

В1. $\boldsymbol{x}a$ лежит в $\mathfrak{M}$.

В2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\,a=\boldsymbol{x}a+\boldsymbol{y}a$.

В3. $\boldsymbol{x}\,(a+b)=\boldsymbol{x}a+\boldsymbol{x}b$.

В4. $\boldsymbol{x}\,(ab)=(\boldsymbol{x}a)\,b$.

В5. $\boldsymbol{x}\cdot 1=\boldsymbol{x}$.

Если все это выполнено, то $\mathfrak{M}$ называется *векторным пространством над* K, точнее, *правым* K*-векторным пространством*, так как коэффициенты a пишутся справа от векторов. Понятие *левого* K*-векторного пространства* вводится аналогично; закон ассоциативности В4 для левого векторного пространства записывается так:

В4*. $(ab)\,\boldsymbol{x}=a\,(b\boldsymbol{x})$.

Если тело K коммутативно, то вместо $\boldsymbol{x}a$ можно также писать $a\boldsymbol{x}$. В этом случае правое векторное пространство становится левым векторным пространством. Если же тело K некоммутативно, то правые и левые векторные пространства необходимо различать.

Вместо $\boldsymbol{x}\,(ab)$ или $(\boldsymbol{x}a)\,b$ мы будем писать $\boldsymbol{x}ab$. Нулевой элемент группы $\mathfrak{M}$, как и тела K, будет обозначаться через $\mathbf{0}$.

Примерами векторных пространств могут служить всевозможные поля, содержащие данное поле K, а в более общей ситуации — всевозможные кольца R, содержащие данное тело K, причем таким образом, что единичный элемент из K является и единичным элементом из R.

Из B2, как обычно, следует, что

$$(\boldsymbol{x}_1+\ldots+\boldsymbol{x}_r)\,a=\boldsymbol{x}_1a+\ldots+\boldsymbol{x}_ra,$$
$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,a=\boldsymbol{x}a-\boldsymbol{y}a,$$
$$\boldsymbol{0}\cdot a=\boldsymbol{0}.$$

Равным образом, из B3 следует, что

$$\boldsymbol{x}\,(a_1+\ldots+a_s)=\boldsymbol{x}a_1+\ldots+\boldsymbol{x}a_s,$$
$$\boldsymbol{x}\,(a-b)=\boldsymbol{x}a-\boldsymbol{x}b,$$
$$\boldsymbol{x}\cdot 0=\boldsymbol{0}.$$

Векторное пространство $\mathfrak{M}$ называется *конечномерным* или, коротко,—*конечным* над K, если существует конечное число порождающих элементов $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m$, через которые можно выразить с помощью коэффициентов a^k из K любой элемент из $\mathfrak{M}$ [1]):

$$x=\sum \boldsymbol{e}_ka^k. \tag{1}$$

Если один из порождающих элементов $\boldsymbol{e}_k$ выражается через остальные $\boldsymbol{e}_i$, то как порождающий элемент пространства $\mathfrak{M}$ он является лишним. Вычеркнем его из ряда $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ и будем так продолжать до тех пор, пока нельзя будет выбросить ни одного из порождающих элементов $\boldsymbol{e}_i$; в результате останутся *n базисных векторов* (или *базис*) $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n$, из которых ни один нельзя линейно выразить через остальные. Такие векторы, среди которых ни один нельзя линейно выразить через остальные, называются *линейно независимыми*.

Если $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n$ — линейно независимые векторы, то из

$$\boldsymbol{p}_1a^1+\ldots+\boldsymbol{p}_na^n=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

с необходимостью следуют равенства

$$a^1=0,\ldots,a^n=0.$$

Действительно, если хотя бы один из элементов a^i был отличен от нуля, то из (2) можно было бы выразить вектор $\boldsymbol{p}_i$ через остальные векторы.

Если $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_n$ составляют базис векторного пространства $\mathfrak{M}$, то каждый вектор $\boldsymbol{x}$ *однозначно* выражается через базисные векторы $\boldsymbol{p}_k$ с помощью коэффициентов x^k из K:

$$\boldsymbol{x}=\sum \boldsymbol{p}_kx^k. \tag{3}$$

---

[1]) Следуя Эйнштейну, мы примем соглашение о том, что в теории векторных и тензорных пространств коэффициенты a^k будут наделяться верхними индексами — это по ряду причин целесообразнее. При таком соглашении суммирования ведутся по индексам, которые в рассматриваемом выражении один раз участвуют сверху и один раз — снизу.

Действительно, если бы существовало второе выражение для того же самого вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum \boldsymbol{p}_k y^k, \tag{4}$$

то, вычитая (4) из (3), мы получили бы некоторую линейную зависимость

$$\sum \boldsymbol{p}_k (x^k - y^k) = \boldsymbol{0},$$

где все разности $x^k - y^k$ должны были бы равняться нулю; поэтому y^k обязательно равно x^k для каждого k.

С помощью (3) каждому вектору $\boldsymbol{x}$ единственным образом сопоставляется ряд коэффициентов $x^1, \ldots, x^n$ из K, которые называются *координатами* вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Обратно, каждому набору из n коэффициентов x^k с помощью (3) однозначным образом сопоставляется вектор $\boldsymbol{x}$. Следовательно, при фиксированном базисе имеет место взаимно однозначное соответствие

$$\boldsymbol{x} \rightleftarrows (x^1, \ldots, x^n). \tag{5}$$

Два вектора можно сложить, складывая их координаты:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum \boldsymbol{p}_k x^k + \sum \boldsymbol{p}_k y^k = \sum \boldsymbol{p}_k (x^k + y^k);$$

вектор умножается на a, когда все его координаты умножаются на a:

$$\boldsymbol{x}a = \left(\sum \boldsymbol{p}_k x^k\right) a = \sum \boldsymbol{p}_k (x^k a).$$

Число n базисных векторов называется *разномерностью* векторного пространства $\mathfrak{M}$. В следующем параграфе мы увидим, что размерность не зависит от выбора базиса.

Векторное пространство размерности n, которое может служить моделью любого векторного пространства этой размерности, получается следующим образом. В качестве *вектора* $\boldsymbol{x}$ берется последовательность из n элементов $x^1, \ldots, x^n$ тела K. Суммой двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ является последовательность $(x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$. Вектор $\boldsymbol{x}$ умножается на скаляр a путем умножения на a каждого из элементов x^k. Определенные таким способом сложение и умножение на a удовлетворяют всем условиям, с помощью которых вводится понятие векторного пространства. Векторы

$$\boldsymbol{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \text{ (1 стоит на } k\text{-м месте)},$$

которых всего n, составляют базис, потому что каждый вектор $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ допускает *однозначное* представление в виде

$$\boldsymbol{x} = \sum \boldsymbol{e}_k x^k.$$

Таким образом, наша модель векторного пространства действительно имеет размерность n.

Из соответствия (5) следует предложение:

Каждое векторное пространство размерности n над K изоморфно модельному пространству, состоящему из последовательностей $(x^1, \ldots, x^n)$.

Задача Если в одном и том же векторном пространстве перейти от базиса $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ к некоторому новому базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и выразить старые базисные векторы $\boldsymbol{p}_k$ через новые $\boldsymbol{e}_i$ с помощью коэффициентов p_k^i:

$$\boldsymbol{p}_k = \sum \boldsymbol{e}_i p_k^i,$$

то новые координаты $'x^i$ вектора $\boldsymbol{x}$ будут выражаться через старые так:

$$'x^i = \sum p_k^i x^k.$$

§ 20. Инвариантность размерности

Мы намерены доказать, что размерность векторного пространства $\mathfrak{M}$, т. е. число элементов произвольного базиса, не зависит от самого базиса.

Вектор $\boldsymbol{y}$ называется *линейно зависимым* от векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ (над телом K), если

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 a^1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m a^m, \tag{1}$$

или, что то же самое, если выполнено линейное соотношение

$$\boldsymbol{y} b + \boldsymbol{x}_1 b^1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m b^m = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

с $b \neq 0$. В частности, вектор $\boldsymbol{y}$ называется *зависимым от пустого множества векторов*, если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

В связи с понятием линейной зависимости существует много теорем, которые мы разделяем на «основные» и на «следствия». Основные теоремы выводятся непосредственно из определения этого понятия. Следствия же, напротив, устанавливаются через основные теоремы без повторного использования определения, т. е. без обращения к смыслу термина «линейная зависимость». Такое положение дел оказывается полезным в связи с одной из последующих глав, посвященной понятию «алгебраической зависимости», для которого имеют место те же самые основные теоремы и поэтому те же самые следствия.

Будет достаточно трех основных теорем. Первая является совершенно естественной:

Основная теорема. 1. *Каждый вектор $\boldsymbol{x}_i$ линейно зависим от векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.*

Основная теорема 2. *Если вектор $\boldsymbol{y}$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, но не от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$, то $\boldsymbol{x}_m$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}, \boldsymbol{y}$.*

Доказательство. В равенстве (2) обязательно $b^m \neq 0$, так как иначе $\boldsymbol{y}$ был бы зависимым уже от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{m-1}$.

Основная теорема 3. *Если $\boldsymbol{z}$ линейно зависим от $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ и если каждый вектор $\boldsymbol{y}_j$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, то вектор $\boldsymbol{z}$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.*

Доказательство. Из $\boldsymbol{z} = \sum \boldsymbol{y}_k a^k$ и $\boldsymbol{y}_k = \sum \boldsymbol{x}_i b_k^i$ следует, что

$$\boldsymbol{z} = \sum_k \left(\sum_i \boldsymbol{x}_i b_k^i \right) a^k = \sum \boldsymbol{x}_i b_k^i a^k = \sum_i \boldsymbol{x}_i \left(\sum_k b_k^i a^k \right).$$

Из основных теорем 1 и 3 получается

Следствие 1. *Если вектор $\boldsymbol{z}$ линейно зависим от $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$, то $\boldsymbol{z}$ линейно зависим и от каждой системы $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$, содержащей систему $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$.*

Частный случай такой ситуации имеет место тогда, когда $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ совпадают с точностью до порядка следования с векторами $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$. Таким образом, понятие линейной зависимости не зависит от порядка следования $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$.

Определение. *Элементы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ называются линейно независимыми, если ни один из них не является линейно зависимым от остальных.*

Понятие линейной независимости не связано с порядком следования векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Пустое множество должно, конечно, считаться линейно независимым. Один-единственный вектор $\boldsymbol{x}$ *линейно независим*, если он не является зависимым от пустого множества векторов, т. е. если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

Следствие 2. *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ линейно независимы, а $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n$ таковыми не являются, то $\boldsymbol{x}_n$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$.*

Доказательство. Один из элементов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{x}_n$ должен быть линейно зависимым от остальных. Если этим элементом является $\boldsymbol{x}_n$, то все доказано. Если же им является не $\boldsymbol{x}_n$, а, скажем, $\boldsymbol{x}_{n-1}$, то $\boldsymbol{x}_{n-1}$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-2}, \boldsymbol{x}_n$, но не от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-2}$; следовательно (основная теорема 2), элемент $\boldsymbol{x}_n$ линейно зависим от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-2}, \boldsymbol{x}_{n-1}$.

Следствие 3. *Каждая конечная система векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ содержит (возможно, пустую) линейно независимую подсистему, от которой все $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ линейно зависимы.*

Доказательство. Найдем в данной системе по возможности бо́льшую подсистему из линейно независимых векторов. Каждый содержащийся в этой подсистеме вектор $\boldsymbol{x}_i$ линейно зависим от этой системы в силу основной теоремы 1, как и каждый не содержащийся в этой системе вектор $\boldsymbol{x}_i$ в силу следствия 2.

Определение. *Две конечные системы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ и $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s$ называются (линейно) эквивалентными, если каждый $\boldsymbol{y}_k$*

линейно зависим от $x_1, \ldots, x_r$, *а каждый* x_i *линейно зависим от* $y_1, \ldots, y_s$.

Определение эквивалентности по самому своему построению симметрично, в силу основной теоремы 1 рефлексивно, а в силу основной теоремы 3 транзитивно. Если некоторый элемент z линейно зависим от одной из двух эквивалентных систем, то согласно основной теореме 3 он зависит и от другой системы. Согласно следствию 3 каждая конечная система эквивалентна некоторой линейно независимой подсистеме.

Следующая теорема о замене принадлежит Штейницу:

Следствие 4. *Если векторы* $y_1, \ldots, y_s$ *линейно независимы и каждый* y_j *линейно выражается через векторы* $x_1, \ldots, x_r$, *то в системе векторов* x_i *существует подсистема* $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ *в точности из* s *векторов такая, что ее можно заменить на систему векторов* $\{y_1, \ldots, y_s\}$ *и полученная так из* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *новая система будет эквивалентна исходной системе* $\{x_1, \ldots, x_r\}$. *В частности, обязательно* $s \leqslant r$.

Доказательство. Для $s=0$ утверждение тривиально: в этом случае нет векторов y_i и нечего заменять. Пусть, таким образом, утверждение верно для $\{y_1, \ldots, y_{s-1}\}$ и пусть подсистему $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{s-1}}\}$ можно заменить на $\{y_1, \ldots, y_{s-1}\}$. При этой замене возникает система $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$, эквивалентная системе $\{x_1, \ldots, x_r\}$. Вектор y_s линейно зависим от $\{x_1, \ldots, x_r\}$, а потому и от эквивалентной системы $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$. Таким образом, существует наименьшее по включению подмножество в $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$, от которого y_s линейно зависим. Это наименьшее подмножество не может состоять только из упомянутых выше y_j, так как y_j и y_s линейно независимы. Следовательно, наименьшее подмножество $\{y_j, \ldots, x_k\}$ содержит по крайней мере один из векторов x_k, которой мы обозначим через x_{i_s}. В силу основной теоремы 2 вектор $x_k = x_{i_s}$ линейно зависим от системы, которая получается из $\{y_j, \ldots, x_k\}$ заменой x_k на y_s; поэтому этот вектор линейно зависим и от большей системы, содержащей построенную, которая получается из $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$ заменой $x_k \longmapsto y_s$. Пусть эта система имеет вид $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s, x_l, \ldots\}$. Она эквивалентна системе $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$, так как x_k линейно зависит от первой системы, а y_s — от второй. Тем самым мы осуществили еще один шаг в направлении замены: новая система $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, y_s, x_l, \ldots\}$ эквивалентна системе $\{y_1, \ldots, y_{s-1}, x_k, x_l, \ldots\}$, а потому и исходной системе $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Следствие 5. *Две эквивалентные линейно независимые системы* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *и* $\{y_1, \ldots, y_s\}$ *состоят из одинакового количества векторов.*

Доказательство. В силу следствия 4 имеют место неравенства $s \leqslant r$ и $r \leqslant s$.

Из следствия 5 немедленно получается, что два любых базиса $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r\}$ и $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s\}$ векторного пространства $\mathfrak{M}$ состоят из одного и того же количества элементов. Таким образом, размерность векторного пространства $\mathfrak{M}$ не зависит от выбора базиса. Размерность называют также *линейным рангом* или *рангом* пространства $\mathfrak{M}$ над телом K.

Если $\mathfrak{M}$ имеет размерность r над K, то из теоремы о замене следует, что среди любых $r+1$ элементов пространства $\mathfrak{M}$ есть хотя бы один, линейно зависимый от всех остальных. Таким образом, можно определить размерность как максимальное число линейно независимых элементов из $\mathfrak{M}$. Отсюда:

Линейное подпространство $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{M}$ (т. е. подмодуль, в котором сохраняется умножение на элементы из K) имеет размерность, не бо́льшую, чем размерность всего пространства $\mathfrak{M}$.

Если $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r$ составляют базис для $\mathfrak{M}$, а $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s$ — базис для $\mathfrak{N}$, то по теореме о замене можно вместо $\{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r\}$ построить другую эквивалентную систему, в которой первыми s элементами будут $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s$. Остальные $\boldsymbol{p}_i$ можно обозначить через $\boldsymbol{e}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_r$. Так получится новая система из порождающих элементов:

$$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{e}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_r\}.$$

Она вновь линейно независима, так как иначе размерность пространства $\mathfrak{M}$ оказалась бы меньше r. Таким образом:

Любой базис линейного подпространства $\mathfrak{N}$ размерности s можно дополнить до базиса всего пространства $\mathfrak{M}$ некоторыми векторами $\boldsymbol{e}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_r$.

Задача 1. Обычные комплексные числа $a+bi$ образуют двумерное векторное пространство над полем вещественных чисел.

Задача 2. Непрерывные вещественные функции $f(x)$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ образуют векторное пространство над полем вещественных чисел, ранг которого бесконечен.

§ 21. Двойственное векторное пространство

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое n-мерное векторное пространство над телом K. *Линейной формой* на $\mathfrak{M}$ называется определенная на $\mathfrak{M}$ функция f со значениями $f(\boldsymbol{x})$ в теле K, являющаяся *линейной* в следующем смысле:

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \tag{1}$$

$$f(\boldsymbol{x}a) = f(\boldsymbol{x})a. \tag{2}$$

Если векторы $\boldsymbol{x}$ выразить через n базисных векторов $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{p}_n x^n,$$

то из (1) и (2) получится равенство

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}_1) x^1 + \ldots + f(\boldsymbol{p}_n) x^n = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n, \tag{3}$$

где $u_i = f(\boldsymbol{p}_i)$. Таким образом, линейная форма $f(\boldsymbol{x})$ — это просто однородная линейная функция координат $x^1, \ldots, x^n$ с коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ из K. Коэффициенты $u_1, \ldots, u_n$ можно выбирать из K произвольно: с помощью равенства (3) по ним всегда можно определить некоторую линейную форму $f(\boldsymbol{x})$ со свойствами (1) и (2).

Сумма двух линейных форм является, очевидно, линейной формой. Точно так же любую линейную форму $f(\boldsymbol{x})$ можно умножать слева на произвольный скаляр a и получить при этом вновь линейную форму $af(\boldsymbol{x})$.

Рассмотрим теперь линейные формы $f, g, \ldots$ как новые объекты, которые будем называть *ковекторами* и обозначать буквами $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$ Вместо $f(\boldsymbol{x})$ мы будем писать $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$ и называть это выражение *скалярным произведением* ковектора $\boldsymbol{u}$ на вектор $\boldsymbol{x}$. Правила оперирования со скалярным произведением таковы:

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} a = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}) a,$$
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x},$$
$$a\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = a(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}).$$

Ковекторы можно умножать слева на элементы $a, b, \ldots$ основного тела K; следовательно, они составляют некоторое левое векторное пространство. Оно называется *пространством* $\mathfrak{D}$, *двойственному векторному пространству* $\mathfrak{M}$. Если задан базис $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ пространства $\mathfrak{M}$, то в силу (3) каждому ковектору $\boldsymbol{u}$ соответствует некоторый набор из n коэффициентов $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$. Обратно, каждому такому набору $u_1, \ldots, u_n$ соответствует один-единственный ковектор $\boldsymbol{u}$, который определяется равенством

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = u_1 x^1 + \ldots + u_n x^n. \tag{4}$$

Коэффициенты $u_1, \ldots, u_n$ называются *координатами* ковектора $\boldsymbol{u}$. Два ковектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ складываются, когда складываются их координаты u_i и v_i. Ковектор $\boldsymbol{u}$ умножается на a, когда умножаются на a слева все его координаты. Следовательно, двойственное пространство $\mathfrak{D}$, как левое векторное пространство, изоморфно левому модельному пространству наборов $(u_1, \ldots, u_n)$, а это означает, что $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{M}$ имеют одинаковые размерности. В случае коммутативного тела K пространство $\mathfrak{D}$ даже изоморфно пространству $\mathfrak{M}$.

Ковекторы

$$\boldsymbol{q}^i = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \text{ (1 на } i\text{-м месте)}$$

составляют согласно § 19 базис в $\mathfrak{D}$. С помощью равенств

$$\boldsymbol{q}^i \cdot \boldsymbol{p}_k = \delta_k^i \begin{pmatrix} = 1, & \text{если } i = k, \\ = 0, & \text{если } i \neq k \end{pmatrix}, \tag{5}$$

этот базис инвариантно связан с базисом $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ пространства $\mathfrak{M}$. Базисы пространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{D}$, связанные равенствами (5), называются *двойственными* (*друг другу*). Координаты произвольного ковектора $\boldsymbol{u}$ в базисе $\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^n$ — это в точности определенные раньше $u_1, \ldots, u_n$.

Скалярное произведение (4) при фиксированном $\boldsymbol{u}$ определяет линейную форму от $\boldsymbol{x}$, а при фиксированном $\boldsymbol{x}$ — линейную форму от $\boldsymbol{u}$. Каждая линейная форма на $\mathfrak{D}$ может быть получена таким способом и поэтому $\mathfrak{M}$ — пространство, двойственное пространству $\mathfrak{D}$.

§ 22. Линейные уравнения над телом

В качестве подготовки к вопросу о решении системы линейных уравнений мы рассмотрим линейное подпространство $\mathfrak{S}$ размерности r в двойственном пространстве $\mathfrak{D}$. Согласно § 20 произвольный базис $\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^r$ подпространства $\mathfrak{S}$ можно дополнить до некоторого базиса $\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^n$ пространства $\mathfrak{D}$. Согласно § 21 в исходном векторном пространстве существует базис $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$, двойственный базису $\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^n$, потому что $\mathfrak{M}$ является двойственным пространству $\mathfrak{D}$.

Будем теперь искать такие векторы $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathfrak{M}$, скалярное произведение которых со всеми ковекторами $\boldsymbol{u}$ из $\mathfrak{S}$ равно нулю:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{u} \in \mathfrak{S}. \tag{1}$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялись r линейных равенств:

$$\boldsymbol{q}^i \cdot \boldsymbol{x} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{2}$$

Если $\boldsymbol{x}$ выразить через базисные векторы $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ и принять во внимание соотношения (5) из § 21, то легко показать, что (2) эквивалентно условию

$$x^1 = 0, \ldots, x^r = 0. \tag{3}$$

Следовательно, искомые векторы $\boldsymbol{x}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_{r+1} x^{r+1} + \ldots + \boldsymbol{p}_n x^n,$$

где $x^{r+1}, \ldots, x^n$ — произвольные коэффициенты. В пространстве $\mathfrak{M}$ эти векторы составляют некоторое линейное подпространство

$\mathfrak{N}$ размерности $n-r$. Оно порождается базисными векторами $\boldsymbol{p}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$.

Обратно, рассмотрим подпространство $\mathfrak{N}$ как заданное с самого начала и будем искать те ковекторы $\boldsymbol{u}$, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми векторами из $\mathfrak{N}$; в этом случае получится в точности пространство ковекторов $\mathfrak{C}$. Мы получили предложение:

Существует взаимно однозначное соответствие между подпространствами $\mathfrak{C}$ размерности r пространства $\mathfrak{D}$ и подпространствами $\mathfrak{N}$ размерности $n-r$ в $\mathfrak{M}$, определяемое следующим образом: $\mathfrak{N}$ состоит из векторов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми ковекторами из $\mathfrak{C}$, а $\mathfrak{C}$ состоит из ковекторов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми векторами из $\mathfrak{N}$[1]).

Перейдем теперь к теории линейных уравнений. Пусть сначала заданы s *однородных* линейных уравнений с n неизвестными $x^1, \ldots, x^n$:

$$\sum a_{ik}x^k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{4}$$

Мы рассматриваем $x^1, \ldots, x^n$ как координаты некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathfrak{M}$. С учетом этого обстоятельства уравнения (4) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = 0, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{a}_i$ — ковектор с координатами $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Если один из ковекторов $\boldsymbol{a}_i$ линейно зависим от остальных, то соответствующее уравнение можно опустить. В конце концов получится система из r независимых уравнений (5). Линейно независимые ковекторы $\boldsymbol{a}_i$ порождают в двойственном пространстве $\mathfrak{D}$ некоторое r-мерное подпространство $\mathfrak{C}$. В таком случае решения системы (4) составляют в точности ортогональное ему подпространство $\mathfrak{N}$ в пространстве $\mathfrak{M}$.

Число r независимых уравнений (5) или независимых ковекторов $\boldsymbol{a}_i$ называется *рангом* системы уравнений. Таким образом, имеет место теорема:

Решения $\boldsymbol{x}$ однородной системы линейных уравнений ранга r составляют в $\mathfrak{M}$ некоторое $(n-r)$-мерное подпространство $\mathfrak{N}$, т. е. существует $n-r$ линейно независимых решений $\boldsymbol{y}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(n-r)}$, от которых линейно зависят все решения системы.

Чтобы получить решения уравнений (4) эффективно, применяют известный метод *последовательного исключения*, который приводит к цели и в случае неоднородных уравнений

$$\sum a_{ik}x^k = c_i \qquad (i = 1, \ldots, s). \tag{6}$$

---

[1]) Ниже подпространства $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{N}$ автор называет ортогональными. — *Прим. перев.*

Если в каком-либо уравнении все коэффициенты равны нулю, то либо $c_i \neq 0$ и уравнение противоречиво, либо $c_i = 0$ и уравнение можно опустить. Если же одно из неизвестных x^k в каком-либо уравнении имеет ненулевой коэффициент, то его можно из этого уравнения выразить через прочие неизвестные и подставить во все остальные уравнения. Продолжая таким образом, мы либо придем к противоречию после нескольких шагов, либо некоторые из неизвестных, скажем, $x^1, \ldots, x^r$, выразим через остальные, причем остальные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ могут потом уже выбираться произвольно.

Если данная система уравнений однородна (все $c_i = 0$), то у нее обязательно есть *нулевое решение* $(0, \ldots, 0)$. Другие (нетривиальные) решения существуют в точности тогда, когда ранг системы меньше n.

Задача 1. Система (6) разложима в точности тогда, когда каждая линейная зависимость между линейными формами $\boldsymbol{a}_i$ имеет место и для c_i, т. е. тогда, когда

$$\text{из } \sum b^i \boldsymbol{a}_i = 0 \quad \text{следует } \sum b^i c_i = 0.$$

Задача 2. Система из n однородных линейных уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение лишь тогда, когда линейные формы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ линейно зависимы, т. е. когда имеет нетривиальное решение $(y^1, \ldots, y^n)$ «транспонированная система уравнений»:

$$\sum y^i a_{ik} = 0.$$

§ 23. Линейные преобразования

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — векторные пространства. *Линейное преобразование* — это отображение $\boldsymbol{A}$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ со следующими свойствами:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}c) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})c. \tag{2}$$

Из (1), как всегда, следует, что

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_r. \tag{4}$$

Если пространство $\mathfrak{M}$ имеет конечную размерность m и векторы $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ составляют в нем базис, то значение линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ на произвольном векторе $\boldsymbol{x}$ полностью определяется его значениями на базисных векторах. Действительно, пусть

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{p}_m x^m.$$

Тогда в силу (4) и (2)

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1)x^1 + \ldots + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_m)x^m. \tag{5}$$

Если $\mathfrak{N}$ также имеет конечную размерность n, то в (5) можно слева и справа векторы $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_k$ выразить через базисные векторы $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ пространства $\mathfrak{N}$:

$$\boldsymbol{y} = \sum \boldsymbol{q}_i y^i, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_k = \sum \boldsymbol{q}_i a_k^i. \tag{7}$$

Из (5) при сравнении коэффициентов получается

$$y^i = \sum a_k^i x^k. \tag{8}$$

Следовательно, линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ определяется некоторой *матрицей* A, т. е. прямоугольной таблицей, в которой в специальном порядке записаны mn элементов a_k^i тела K:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_m^n \end{Vmatrix}.$$

Если базисы $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ и $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ фиксированы, то каждое линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ однозначным образом определяет некоторую матрицу A, и наоборот. Верхний индекс i является *номером строки*, а нижний индекс k — *номером столбца*, на пересечении которых в матрице стоит элемент a_k^i. Согласно (7) элементы k-го столбца — это координаты вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_k$.

Если, кроме преобразования $\boldsymbol{A}$, задано второе преобразование $\boldsymbol{B}$, отображающее векторное пространство $\mathfrak{N}$ в векторное пространство $\mathfrak{R}$ размерности r:

$$z^h = \sum b_i^h y^i, \tag{9}$$

то мы получим линейное преобразование $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, отображающее $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{R}$ в согласии со следующей формулой:

$$z^h = \sum b_i^h a_k^i x^k = \sum c_k^h x^k, \tag{10}$$

а соответствующей матрицей будет матрица

$$C = BA, \tag{11}$$

элементы которой таковы:

$$c_k^h = \sum b_i^h a_k^i. \tag{12}$$

Формула (12) определяет *умножение матриц*. Матрицы B и A можно перемножить и получить произведение BA лишь тогда, когда в матрице B столько же столбцов, сколько в матрице $\boldsymbol{A}$ строк. Элемент c_k^h произведения матриц BA получается по формуле (12), в которой элементы h-й строки матрицы B умножаются

на элементы k-го столбца матрицы A и полученные произведения складываются.

Разумеется, для умножения матриц, как и для умножения преобразований, выполняется *закон ассоциативности*:

$$D(BA) = (DB)A.$$

По этой причине пишут просто DBA. Точно так же поступают в записи произведения более, чем трех сомножителей.

Каждому вектору $\boldsymbol{x}$ с координатами x^k можно поставить в соответствии матрицу из одного столбца:

$$X = \begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица определяет вектор $\boldsymbol{x} = \sum \boldsymbol{p}_k x^k$ однозначно, как только фиксированы базисные векторы $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_m$. Равенство (8), определяющее преобразование, теперь можно записать как матричное равенство:

$$Y = AX.$$

Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют одинаковые размерности, то A является квадратной матрицей. В частности, линейные преобразования векторного пространства $\mathfrak{M}$ в себя задаются квадратными матрицами.

Под *рангом* линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ понимается размерность образа $\boldsymbol{A}\mathfrak{M}$, также являющегося векторным пространством, т. е. максимальное число линейно независимых векторов среди образов $\boldsymbol{Ax}$. Под *столбцовым рангом* матрицы A понимается число линейно независимых столбцов. Если A — матрица линейного преобразования $\boldsymbol{A}$, то столбцы в A — это векторы $\boldsymbol{Ap}_1, \ldots, \boldsymbol{Ap}_m$ и мы имеем предложение:

Ранг преобразования $\boldsymbol{A}$ равен столбцовому рангу матрицы A.

Если ранг равен размерности m пространства $\mathfrak{M}$, то отображение $\boldsymbol{A}$ является взаимно однозначным. Если, кроме того, размерность пространства $\mathfrak{N}$ равна размерности пространства $\mathfrak{M}$, то пространство-образ $\boldsymbol{A}\mathfrak{M}$ равно $\mathfrak{N}$, и в этом случае налицо взаимно однозначное линейное отображение $\boldsymbol{A}$ пространства $\mathfrak{M}$ на пространство $\mathfrak{N}$. Такое преобразование $\boldsymbol{A}$ называется *неособым*; тем же термином характеризуется и матрица A — *неособая*. Таким образом, квадратная матрица является особой лишь тогда, когда ее столбцовый ранг меньше m.

Являясь взаимно однозначным, неособое линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ обладает обращением, т. е. преобразованием $\boldsymbol{A}^{-1}$, действующим обратным по отношению к $\boldsymbol{A}$ способом и, следова-

тельно, удовлетворяющим равенству

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{I}$ — *тождественное преобразование* или *тождество*, которое переводит каждый вектор $\boldsymbol{x}$ в себя. Матрица этого преобразования *единичная*:

$$I=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Если осуществить сначала преобразование $\boldsymbol{A}^{-1}$, а затем — преобразование $\boldsymbol{A}$, то точно так же получится тождество

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}. \tag{14}$$

Равенства (13) и (14) можно записать и как матричные равенства:

$$A^{-1}A=AA^{-1}=\boldsymbol{I}. \tag{15}$$

Чтобы вычислить матрицу A^{-1} эффективно, нужно решить систему уравнений (8) относительно неизвестных x^k при известных y^i; лучше всего воспользоваться методом последовательного исключения (§ 22). В качестве решения получается

$$x^k=\sum b^k_j y^j. \tag{16}$$

Матрица $B=\|b^k_j\|$ является как раз искомой *обратной матрицей* A^{-1}.

Выясним теперь, как меняется матрица A преобразования $\boldsymbol{A}$, когда в пространствах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ вводятся новые базисы. Старые базисы обозначались через $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m$; новые обозначим через $\boldsymbol{p}'_1, \dots, \boldsymbol{p}'_n$ и $\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_m$. Новые базисы выражаются через старые так:

$$\boldsymbol{p}'_i=\sum \boldsymbol{p}_j f^j_i, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{q}'_j=\sum \boldsymbol{q}_k g^k_j. \tag{18}$$

Коэффициенты f^j_i и g^k_j образуют неособые матрицы F и G. Пусть обратная к G матрица G^{-1} обозначена через H. С помощью этой матрицы $H=\|h^l_k\|$ можно разрешить равенства (18) относительно $\boldsymbol{q}_k$:

$$\boldsymbol{q}_k=\sum \boldsymbol{q}'_l h^l_k. \tag{19}$$

Матрица A получается в соответствии с (7), когда $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_j$ выражаются через $\boldsymbol{q}_k$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_j=\sum \boldsymbol{q}_k a^k_j. \tag{20}$$

Чтобы получить новую матрицу, выразим $\boldsymbol{Ap}'_i$ через $\boldsymbol{q}'_i$:

$$\boldsymbol{Ap}'_i = \sum (\boldsymbol{Ap}_j) f^j_i = \sum \boldsymbol{q}_k a^k_j f^j_i = \sum \boldsymbol{q}'_l h^l_k a^k_j f^j_i.$$

Следовательно, новая матрица такова:

$$A' = HAF = G^{-1}AF. \tag{21}$$

В частном случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, $F = G$ получается

$$A' = F^{-1}AF. \tag{22}$$

Задача 1. Неособые линейные преобразования векторного пространства $\mathfrak{M}$ в себя образуют группу относительно умножения.

Задача 2. Если для двух линейных преобразований пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{N}$ определить *сумму* $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ равенством

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bx},$$

то $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ вновь будет линейным преобразованием. Его матрица является *суммой* матриц A и B, т. е. ее элементы таковы:

$$c^i_k = a^i_k + b^i_k.$$

Транспонированное преобразование $\boldsymbol{A}^t$. Каждому преобразованию $\boldsymbol{A}$ пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{N}$ соответствует преобразование $\boldsymbol{A}^t$, которое отображает двойственное пространство $\mathfrak{N}^d$ в двойственное пространство $\mathfrak{M}^d$. Действительно, если $\boldsymbol{v}$ — фиксированный ковектор из $\mathfrak{N}^d$ и $\boldsymbol{x}$ — переменный вектор из $\mathfrak{M}$, то скалярное произведение

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Ax}$$

является линейной формой по $\boldsymbol{x}$, т. е. скалярным произведением вектора $\boldsymbol{x}$ с некоторым ковектором $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{23}$$

Этот ковектор $\boldsymbol{u}$, очевидно, линейно связан с $\boldsymbol{v}$. Следовательно, можно положить

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{v}, \tag{24}$$

и получить равенство

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{25}$$

Определенное в (25) преобразование $\boldsymbol{A}^t$ называется *транспонированным* по отношению к $\boldsymbol{A}$.

Равенство (23), переписанное в координатах, выглядит так:

$$\sum v_i a^i_k x^k = \sum u_k x^k.$$

Отсюда следует, что

$$u_k = \sum v_i a^i_k.$$

Матричные элементы преобразования $\boldsymbol{A}^t$ являются, таким образом, элементами a^i_k, но теперь k означает номер строки, а i —

номер столбца. Так получаемую матрицу называют *транспонированной* и обозначают через A^t.

Задача 3. Ранг преобразования $\boldsymbol{A}^t$ равен рангу преобразования $\boldsymbol{A}$.

Задача 4. Ранг преобразования $\boldsymbol{A}^t$ равен также строчечному рангу матрицы A, т. е. числу линейно независимых строк. При этом строки рассматриваются как элементы некоторого левого векторного пространства, а столбцы — как элементы правого векторного пространства.

Задача 5. Из задач 3 и 4 следует, что строчечный ранг матрицы A равен ее столбцовому рангу.

§ 24. Тензоры

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое n-мерное векторное пространство и $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ — его базис над полем K. Векторы пространства $\mathfrak{M}$ представляются, следовательно, в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 x^1 + \ldots + \boldsymbol{p}_n x^n. \tag{1}$$

Рассмотрим *билинейные формы* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ со значениями в K, т. е. функции от двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ со следующими свойствами:

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \tag{2}$$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}), \tag{3}$$

$$f(\boldsymbol{x}a, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, a, \tag{4}$$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}b) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, b. \tag{5}$$

Билинейная форма $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ оказывается заданной, как только заданы значения

$$t_{ik} = f(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_k). \tag{6}$$

Действительно, в этом случае

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f\left(\sum \boldsymbol{p}_i x^i, \ \sum \boldsymbol{p}_k y^k\right) = \sum t_{ik} x^i y^k, \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем i и k от 1 до n. Элементы t_{ik} называются *координатами* билинейной формы f. Выберем t_{ik} в основном поле K произвольно; тогда форма, определенная с помощью (7), обязательно обладает свойствами (2) — (5). Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между билинейными формами и системами из n^2 их координат $\|t_{ik}\|$.

Подобно рассмотренным в § 21 линейным формам билинейные формы можно складывать и умножать на константы из K. Билинейные формы составляют векторное пространство размерности n^2. Элементы этого векторного пространства называются также *тензорами*, а точнее, — *ковариантными двухвалентными тензорами*. Мы обозначаем эти тензоры через $\boldsymbol{t}$ и вместо $\boldsymbol{f(x, y)}$ пишем $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{xy}$. Согласно (7) в этом случае

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{xy} = \sum t_{ik} x^i y^k.$$

При желании разделительную точку можно отбросить и писать просто $\boldsymbol{txy}$.

Аналогично можно ввести в рассмотрения *полилинейные формы* или *ковариантные тензоры* произвольной валентности:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots) = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{xyz} \ldots,$$

причем эти формы линейны как по $\boldsymbol{x}$, так и по $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$ Их коэффициенты таковы:

$$t_{ikl\ldots} = f(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{p}_l, \ldots) = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{p}_k \boldsymbol{p}_l \ldots$$

и

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{xyz} \ldots = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots) = \sum t_{ikl\ldots} x^i y^k z^l \ldots$$

Двойственным образом строятся *контравариантные тензоры*, т. е. полилинейные формы, аргументы которых являются ковекторами $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$; например,

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{uvw} = g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum t^{ikl} u_i v_k w_l.$$

Ковариантные одновалентные тензоры — это в точности ковекторы, а контравариантные одновалентные тензоры взаимно однозначно соответствуют векторам $\boldsymbol{x}$ пространства $\mathfrak{M}$:

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x} = \sum x^i u_i.$$

По этой причине ковекторы и векторы называют также, следуя Эйнштейну, *ковариантными и контравариантными векторами*.

Наконец, можно рассматривать *смешанные тензоры* $\boldsymbol{t}$. Они определяются через полилинейные формы, аргументы которых являются векторами и ковекторами в произвольном числе; например,

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{ux} = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \sum t_l^k u^l x_k.$$

Задача 1. Произвольный двухвалентный тензор симметричен по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{xy} = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{yx}$$

тогда и только тогда, когда симметричны его координаты:

$$t_{lk} = t_{kl}.$$

Задача 2. Смешанные двухвалентные тензоры $\boldsymbol{a}$ с координатами a_k^l взаимно однозначно сопоставляются линейным преобразованиям $\boldsymbol{A}$ пространства $\mathfrak{M}$ в себя с матричными элементами a_k^l. В силу равенства

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{ux} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{Ax}$$

сопоставление инвариантно, т. е. не зависит от координатной системы.

Задача 3. Ковариантный тензор $\boldsymbol{g}$ с координатами g_{ik} определяет некоторое линейное преобразование $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{u}$ пространства $\mathfrak{M}$ в двойственное ему пространство $\mathfrak{M}^d$ по формуле

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{zx}$$

или

$$u_l = \sum g_{lk} x^k.$$

Если преобразование неособое, то его можно обратить:

$$x^k = \sum g^{kl} u_l.$$

Тогда произведение матриц $\|g_{ik}\|$ и $\|g^{kl}\|$ является единичной матрицей:

$$\sum g_{lk} g^{kl} = \delta_i^l.$$

§ 25. Антисимметрические полилинейные формы и определители

Пусть K — поле и $\mathfrak{M}$ — некоторое n-мерное векторное пространство над K с базисом $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$.

Билинейная форма $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum t_{ik} x^i y^k$ называется *альтернированной* или *антисимметрической*, если для всех $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеют место равенства

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{1}$$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0. \tag{2}$$

Свойство (1) является следствием свойства (2), потому что из (2) следует, что

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0,$$

и в силу (2)

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Если применить (1) и (2) к базисным векторам, то получится, что

$$t_{ik} + t_{ki} = 0, \tag{3}$$

$$t_{ii} = 0. \tag{4}$$

Обратно, (1) и (2) следуют из (3) и (4). В самом деле, достаточно доказать (2). Имеем

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum t_{ik} x^i x^k = \sum t_{ii} x^i x^i + \sum_{i<k} (t_{ik} + t_{ki}) x^i x^k = 0.$$

Полилинейная форма $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)$ называется *антисимметрической*, если она антисимметрическая по любой паре своих аргументов. Для этого достаточно, чтобы $F(\boldsymbol{x}, \ldots)$ обращалась в нуль всякий раз, когда два аргумента оказываются равными. Для координат $t_{ijk}\ldots$ это означает, что они обращаются в нуль, как только оказываются равными два индекса, и меняют знак, когда два индекса меняются местами:

$$t_{\ldots j \ldots j} = 0,$$

$$t_{\ldots j \ldots k \ldots} = -t_{\ldots k \ldots j \ldots}$$

Рассмотрим частный случай антисимметрической полилинейной формы от n аргументов на n-мерном пространстве $\mathfrak{M}$. Ее

координаты $t_{ij\ldots}$ имеют n индексов, каждый из которых изменяется от 1 до n. Если два индекса оказываются равными, то $t_{ij\ldots}=0$. Поэтому нужно рассматривать лишь те $t_{ij\ldots}$, индексы которых получаются перестановкой чисел 1, 2, ..., n. Положим

$$t_{12\ldots n}=a.$$

Из последовательности индексов 1, 2, ..., n можно получить любую другую, последовательно осуществляя *транспозицию* (т. е. перемену местами) двух индексов. Действительно, с помощью таких транспозиций можно сначала поставить на желаемое место индекс 1, затем индекс 2 и т. д. При каждой транспозиции коэффициент $t_{ij\ldots}$ умножается на -1. Четное число транспозиций (ik) дает в качестве произведения четную подстановку, а нечетное число транспозиций — нечетную подстановку. Следовательно, если π — подстановка, которая переводит $12\ldots n$ в $ijk\ldots$, то

$$t_{ijk\ldots}=\begin{cases} a, & \text{если } \pi \text{ четная,} \\ -a, & \text{если } \pi \text{ нечетная.} \end{cases} \tag{5}$$

Если, в частности, выбрать $a=1$, то получится специфическая полилинейная антисимметрическая функция

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots)=\sum \pm x^i y^j z^k \ldots \tag{6}$$

Среди прочих полилинейных форм эта форма выделяется тем, что ее значение на базисных векторах $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ оказывается равным единице:

$$D(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)=1. \tag{7}$$

Из (5) следует, что каждая антисимметрическая полилинейная форма равна aD:

$$F=aD, \tag{8}$$

или, так как $F(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)=a$, то

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots)=F(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)\,D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots). \tag{9}$$

Тем самым мы получили следующую основную теорему:

Существует единственная антисимметрическая полилинейная форма D, которая на базисных векторах $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ принимает значение, равное единице. Каждая антисимметрическая полилинейная форма F получается из D умножением на

$$a=F(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n).$$

Форма $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots)$ называется *определителем* n векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ относительно базиса $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$.

Если в качестве $\mathfrak{M}$ выбрать описанное в § 19 модельное векторное пространство, элементами которого служат последовательности $(x^1, \ldots, x^n)$, то в $\mathfrak{M}$ естественным образом окажется выде-

ленным базис

$$\boldsymbol{e}_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0). \tag{10}$$

Координатами произвольного вектора $(x^1, \ldots, x^n)$ относительно этого базиса будут как раз $x^1, \ldots, x^n$. Следовательно, определитель D оказывается функцией n последовательностей, которые можно расположить в виде столбцов матрицы B:

$$B = \begin{Vmatrix} x^1 & y^1 & \ldots \\ x^2 & y^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & y^n & \ldots \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Согласно сказанному выше эта функция D полностью определяется тремя свойствами:

1) D линейна по каждому столбцу матрицы B;

2) D равна нулю, если два столбца одинаковы;

3) D равна единице, если в качестве столбцов взять базисные векторы (10).

Обычно определитель D обозначают так:

$$D = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & \ldots \\ x^2 & y^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x^n & y^n & \ldots \end{vmatrix} = \sum \pm x^i y^j z^k \ldots \tag{12}$$

Основное свойство определителя D заключено в *теореме об умножении определителей*. Мы получим ее без труда, если применим к векторам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ линейное преобразование $\boldsymbol{A}$ и построим форму

$$D(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}, \ldots).$$

Она вновь будет полилинейной и окажется равной нулю, если два вектора из числа $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ будут одинаковыми. Следовательно, мы можем применить основную теорему, т. е. формулу (9), и получить

$$D(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}, \ldots) = D(\boldsymbol{Ap}_1, \ldots, \boldsymbol{Ap}_n)\, D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots). \tag{13}$$

Вектор $\boldsymbol{Ap}_k$ имеет координаты $a_k^1, a_k^2, \ldots$ Поэтому (13) можно записать и так:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i^1 x^i & \sum a_i^1 y^i \ldots \\ \sum a_i^2 x^i & \sum a_i^2 y^i \ldots \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \ldots \\ a_1^2 & a_2^2 \ldots \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \ldots \\ x^2 & y^2 \ldots \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{14}$$

В этом и состоит *теорема об умножении определителей*. Если переобозначить элементы матрицы B через b_k^i, то теорему об

умножении можно записать и так:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i^1 b_1^i & \sum a_i^1 b_2^i \ldots \\ \sum a_i^2 b_1^i & \sum a_i^2 b_2^i \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \ldots \\ a_1^2 & a_2^2 \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \ldots \\ b_1^2 & b_2^2 \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

или еще короче, если через $\mathrm{Det}(A)$ обозначить определитель матрицы A,

$$\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B). \tag{15}$$

В частности, если в качестве A взять любую неособую матрицу, а в качестве B — ее обратную, то левая часть в (15) будет равна 1, и мы получим

$$\mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(A^{-1}) = 1. \tag{16}$$

Отсюда следует, что определитель неособой матрицы A не равен нулю.

Формула (13) может быть также переписана следующим образом:

$$D(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ay},\ \ldots) = \mathrm{Det}(A)\,D(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \ldots).$$

Если обе части умножить на произвольный элемент c из поля K, то получится

$$cD(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ay},\ \ldots) = \mathrm{Det}(A)\,cD(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \ldots),$$

или

$$F(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ay},\ \ldots) = \mathrm{Det}(A)\,F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\ \ldots),$$

где F — произвольная альтернированная полилинейная форма. Элемент $\mathrm{Det}(A)$ *является, следовательно, множителем, на который нужно умножить форму* $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \ldots)$, *чтобы получить* $F(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ay},\ \ldots)$. Отсюда следует, что $\mathrm{Det}(A)$ зависит только от преобразования $\boldsymbol{A}$, а не от матрицы A, вычисленной в данном базисе $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$. Следовательно, мы можем говорить об *определителе* $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})$ *линейного преобразования* $\boldsymbol{A}$, не обращая внимания на заданный базис. Этот определитель всегда равен определителю матрицы A, каким бы ни был выбранный базис:

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Det}(A). \tag{17}$$

Задача 1. Если столбцы матрицы линейно зависимы, то определитель равен нулю.

Задача 2. Определитель линейного преобразования $\boldsymbol{A}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{A}$ особое.

Задача 3. Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum a_k^i x^k = c^i$$

разрешима при любых c^i тогда и только тогда, когда определитель матрицы $\|a_k^i\|$ отличен от нуля.

Задача 4. Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$\sum a_k^i x^k = 0$$

обладает ненулевым решением тогда и только тогда, когда определитель равен нулю.

Транспонирование. Рассмотрим определитель

$$F=\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n \\ y^1 & y^2 & \dots & y^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\sum \pm x^1 y^2 \dots,$$

где сумма справа построена таким образом, что векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$ в процессе суммирования оказываются переставленными всевозможными способами. Функция F является альтернированной и на базисных векторах $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ ее значение равно единице. Следовательно, F — определитель $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots)$. Отсюда:

Определитель транспонированной матрицы A^t равен определителю матрицы A:

$$\operatorname{Det}(A^t)=\operatorname{Det}(A). \tag{18}$$

Задача 5. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{y}) & \dots \\ (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=D(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \dots)\cdot D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots).$$

Задача 6. Произвольная альтернированная полилинейная форма $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots)$ от более чем n векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$ из n-мерного векторного пространства равна нулю тождественно.

Задача 7. Если из скалярных произведений $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x}, \dots$ $n+1$ ковекторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \dots$ на $n+1$ векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \dots$ векторного пространства размерности n составить определитель из $n+1$ строк и $n+1$ столбцов, то этот последний будет равен нулю.

Задача 8 [1]). Доказать, что

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix}=\operatorname{Det}(A)\cdot\operatorname{Det}(B), \tag{19}$$

где A, B — квадратные клетки.

Задача 9[1]). *Минором* k-го порядка определителя (12) называется определитель матрицы из элементов, расположенных на пересечении выделенных k строк и k столбцов матрицы B (см. (11)). Доказать следующее правило «разложения определителя по строке»: пусть $b_i^1, \dots, b_i^n$ — i-я строка матрицы B, $B_i^1, \dots, B_i^n$ — миноры $(n-1)$-го порядка ее определителя, причем B_i^j — определитель матрицы, получаемой из B вычеркиванием i-й строки и j-го столбца; тогда

$$\operatorname{Det}(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} b_i^j B_i^j. \tag{20}$$

(Так как функция Det линейная по строкам, то

$$\operatorname{Det}(B)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_i^j & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где строки, не выписанные явно, те же, что и в матрице B. Переставив строки и столбцы, применить к слагаемым задачу 8.)

---

[1]) Этих задач нет в оригинале; они добавлены потому, что автор неоднократно пользуется ниже формулой (20) и понятием минора. — *Прим. ред.*

§ 26. Тензорное произведение, свертка и след

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое n-мерное векторное пространство над полем K.

Из двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно следующим образом построить тензорное произведение $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$. Возьмем два переменных ковектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, которые независимо друг от друга пробегают двойственное векторное пространство $\mathfrak{M}^d$, и построим произведение

$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y}).$$

Оно является билинейной формой от $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ и поэтому определяет некоторый тензор $\boldsymbol{t}$:

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Этот тензор мы называем *тензорным произведением* $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$; формулой (1) он определен инвариантно. В координатах имеем:

$$\sum t^{ik} u_i v_k = \left(\sum u_i x^i\right)\left(\sum v_k y^k\right)$$

и, следовательно,

$$t^{jk} = x^j y^k. \tag{2}$$

Докажем теперь предложение:

Каждое билинейное отображение пар $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *в какое-либо векторное пространство* $\mathfrak{N}$ *можно получить следующим образом: сначала нужно из каждой пары* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *построить произведение* $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$, *и затем линейно отобразить пространство* $\mathfrak{T}$ *двухвалентных тензоров в пространство* $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Произвольное билинейное отображение $\boldsymbol{B}$ со значениями $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в пространстве $\mathfrak{N}$ можно, следуя § 24, представить формулой

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum \boldsymbol{s}_{ik} x^i y^k, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{s}_{ik}$ — векторы из $\mathfrak{N}$. Определим линейное отображение $\boldsymbol{S}$ из $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{N}$ формулой

$$\boldsymbol{S}t = \sum \boldsymbol{s}_{ik} t^{ki}. \tag{4}$$

В частности, если применить это отображение к тензорному произведению $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}$, то в силу (2) получится равенство

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = \sum \boldsymbol{s}_{ik} x^i y^k = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

чем и доказывается требуемое.

Добавление. *Линейное отображение* $\boldsymbol{S}$ *определяется билинейным отображением* $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *однозначно.*

Доказательство. Произведения базисных векторов $\boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_k$ составляют некоторый базис в пространстве тензоров $\mathfrak{T}$. Следо-

вательно, если известны значения $S(\boldsymbol{p}_i \otimes \boldsymbol{p}_k)$, то преобразование S однозначно определено.

Следует еще заметить, что теорема и добавление к ней формулируются без обращения к координатам. Лишь для доказательства вводится произвольный базис $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$.

Задача. Сформулировать аналогичную теорему для полилинейного отображения $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots)$.

Само собой разумеется, что сформулированная выше теорема выполняется и тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ берутся из различных векторных пространств. Пусть $\mathfrak{D}$ — пространство, двойственное пространству $\mathfrak{M}$. Из произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ из $\mathfrak{M}$ и ковектора $\boldsymbol{u}$ из $\mathfrak{D}$ можно построить тензорное произведение

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{u}.$$

Его координаты таковы:

$$t^i_k = x^i u_k.$$

Рассмотрим теперь билинейное отображение $\boldsymbol{B}$, которое паре $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ сопоставляет скалярное произведение $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}.$$

В силу теоремы и добавления к ней существует однозначно определенное линейное отображение пространства тензоров $\mathfrak{T}$ в поле K, для которого

$$S(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{5}$$

Приведенные выше формулы (3) и (4) дают нам средство выразить объект $\boldsymbol{St}$ через координаты t^i_k тензора $\boldsymbol{t}$. В нашем случае формула (3) выглядит так:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = \sum x^i u_i;$$

поэтому формула (4) должна иметь вид

$$\boldsymbol{St} = \sum t^i_i. \tag{6}$$

Операция S называется *сверткой* смешанного тензора $\boldsymbol{t}$. Приведенное выше доказательство показывает, что свертка является операцией, инвариантной относительно выбора координатных систем.

Составим теперь из компонент t^i_k рассматриваемого тензора матрицу

$$T = \| t^i_k \|;$$

тогда результат свертки оказывается суммой диагональных элементов, или *следом* матрицы T:

$$S(T) = \sum t^i_i. \tag{7}$$

След матрицы T является, следовательно, некоторым инвариантом тензора t, не зависящим от выбора координатных систем.

Согласно задаче 2 из § 24 тензорам $\boldsymbol{t}$ с координатами t_k^i взаимно однозначно сопоставляются линейные преобразования $\boldsymbol{T}$ с матричными элементами t_k^i. Сопоставление осуществляется инвариантно с помощью формулы

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{u}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}.$$

Итак,

След $S(\boldsymbol{T}) = \sum t_i^i$ *матрицы* T *является инвариантом линейного преобразования* $\boldsymbol{T}$.

Эту теорему можно также доказать непосредственно, без использования тензорного произведения. Действительно, из определения следа (7) немедленно следует, что

$$S(BA) = S(AB),$$
$$S(CAB) = S(ABC).$$

Положим здесь $B = F$ и $C = F^{-1}$, где F — неособая матрица; тогда получится

$$S(F^{-1}AF) = S(A).$$

Согласно (22) из § 23 матрица преобразования $\boldsymbol{A}$ в произвольно выбранном новом базисе имеет вид $F^{-1}AF$. Таким образом, след $S(\boldsymbol{A})$ не зависит от выбора базиса.