УПОРЯДОЧЕННЫЕ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

§ 68. Упорядоченные множества

Множество называется *упорядоченным* или *линейно упорядоченным*, если на его элементах определено отношение $a < b$, подчиненное следующим условиям:

1. Для *любых* двух элементов a, b либо $a < b$, либо $b < a$, либо $a = b$.

2. Для двух элементов a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a < b$, $b < a$, $a = b$.

3. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$.

Если предполагаются выполненными лишь требования 2 и 3, то множество называется *частично упорядоченным* или *полуупорядоченным*. Один важный класс полуупорядоченных множеств изучается в теории *структур*. См. по этому поводу Биркгоф Г. Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.

Если $a < b$, то говорят, что *a предшествует b*, а *b следует за a* или что *a находится перед b*, а *b — после a*.

Из отношения $a < b$ определяется несколько производных отношений:

$a > b$ означает, что $b < a$;
$a \leqslant b$ означает, что $a < b$ или $a = b$;
$a \geqslant b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

В линейно упорядоченном множестве отношение $a \leqslant b$ является отрицанием отношения $a > b$ и точно так же отношение $a \geqslant b$ — отрицанием отношения $a < b$.

Если некоторое множество упорядочено или частично упорядочено, то и каждое его подмножество упорядочено или соответственно частично упорядочено тем же самым отношением.

Может случиться, что упорядоченное или полуупорядоченное множество M обладает «первым элементом», который предшествует всем остальным. Например, таково число 1 в ряду натуральных чисел.

Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое непустое его подмножество имеет первый элемент.

Примеры. 1. Каждое упорядоченное конечное множество является вполне упорядоченным.

2. Ряд натуральных чисел вполне упорядочен, потому что в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется первый элемент.

3. Множество целых чисел $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ в «естественном» порядке не является вполне упорядоченным, потому что в нем самом нет первого элемента. Однако его можно вполне упорядочить, если расположить его элементы, например, так:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots$$

или, например, так:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,$$

где все положительные числа предшествуют остальным.

Задача 1. Определим на множестве пар натуральных чисел (a, b) отношение порядка следующим образом: пусть $(a, b) < (a', b')$, если либо $a < a'$, либо $a = a'$, $b < b'$. Доказать, что так определенное отношение превращает данное множество во вполне упорядоченное.

Задача 2. В любом вполне упорядоченном множестве каждый элемент a (за исключением, быть может, элемента, являющегося последним) обладает «непосредственно следующим за ним» элементом $b > a$, причем между b и a нет никаких других элементов x (т. е. элементов x со свойством $a < x < b$). Доказать это. Имеется ли в этом случае для каждого элемента (за исключением первого) элемент, непосредственно предшествующий ему?

Пусть M — подмножество частично упорядоченного множества E. Если все элементы x из M удовлетворяют условию $x \leqslant s$, то s называется *верхней границей* множества M. Если в E существует наименьшая верхняя граница g, так что для всех других верхних границ s выполнено условие $s \geqslant g$, то g является однозначно определенной границей и называется *верхней гранью* множества M в E.

Примеры. 1. Верхняя грань множества отрицательных чисел в поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел равна нулю. 2. Множество натуральных чисел не имеет в $\mathbb{Q}$ верхней границы и, конечно, не имеет верхней грани. 3. Множество M рациональных чисел x со свойством $x^2 < 2$ имеет в $\mathbb{Q}$ верхнюю границу 2, но не имеет верхней грани. Однако, если присоединить к $\mathbb{Q}$ вещественное число $\sqrt{2}$, то множество M в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ приобретает верхнюю грань $\sqrt{2}$.

§ 69. Аксиома выбора и лемма Цорна

Цермело первым заметил, что многочисленные математические исследования опираются на некоторую аксиому, которую он сформулировал как аксиому выбора. Состоит она в следующем:

Если задано некоторое множество непустых множеств, то существует «функция выбора», т. е. функция, которая каждому из этих множеств сопоставляет какой-либо его элемент.

Подчеркнем, что каждое отдельно взятое множество предполагается непустым и, следовательно, из каждого множества всегда можно выбрать некоторый его элемент. Аксиома утверждает, что из всех таких множеств можно одновременно выбрать по элементу.

Всюду в дальнейшем, где это будет нужно, мы предполагаем выполненной аксиому выбора.

Важными следствиями из аксиомы выбора являются лемма Цорна и теорема о том, что каждое множество можно вполне упорядочить. В настоящем параграфе мы сформулируем и докажем лемму Цорна, а в следующем параграфе — теорему о полном упорядочении.

Подмножества $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... некоторого основного множества $\mathfrak{g}$ в свою очередь составляют некоторое множество: *степень P множества* $\mathfrak{g}$. Между двумя подмножествами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ может иметь место соотношение $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, означающее, что $\mathfrak{a}$ — собственное подмножество множества $\mathfrak{b}$. С помощью этого соотношения множество P оказывается полуупорядоченным. Линейно упорядоченное подмножество множества P называется, в соответствии с терминологией Цорна, *цепью*. Для любых двух элементов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ некоторой цепи K должно, следовательно, выполняться одно из соотношений: $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ или $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ или $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Подмножество A в P называется *замкнутым по Цорну*, если с каждой цепью оно содержит и объединение ее элементов.

Максимальный элемент в подмножестве A множества P — это такое множество $\mathfrak{m}$ из A, которое не содержится ни в каком другом множестве, являющемся элементом в A.

Принцип максимума или лемма Цорна утверждает:

Каждое замкнутое подмножество A в множестве P содержит по меньшей мере один максимальный элемент $\mathfrak{m}$.

Эту лемму можно сформулировать несколько более общим образом, следуя Бурбаки. Вместо подмножества A из P можно рассматривать произвольное полуупорядоченное множество M. Цепь K в M, как и прежде, определяется как линейно упорядоченное подмножество в M. Для любых двух элементов a и b некоторой цепи должно, следовательно, выполняться одно из соотношений: $a < b$ или $b < a$ или $a = b$.

Множество M называется *замкнутым*, если вместе с каждой цепью оно содержит и ее верхнюю грань. Принцип максимума тогда утверждает:

Любое частично упорядоченное замкнутое множество M содержит максимальный элемент $\mathfrak{m}$,

Согласно Кнезеру[1]) существование максимального элемента можно доказать при более слабых предположениях. Вместо требования о том, чтобы множество M содержало вместе с каждым своим линейно упорядоченным подмножеством K и его верхнюю грань, достаточно предположить, что M содержит вместе с каждым своим вполне упорядоченным подмножеством K какую-либо его верхнюю границу Кроме того, как показал Кнезер, при этом ослабленном предположении доказывается «основная лемма Бурбаки».

Покажем, что принцип максимума следует из аксиомы выбора. Для этой цели докажем сначала, не используя аксиому выбора, следующую основную лемму Бурбаки:

Пусть M — частично упорядоченное замкнутое множество, и пусть $x \longmapsto fx$ — некоторое отображение множества M в себя, обладающее следующим свойством:

$$x \leqslant fx \quad \text{для всех} \quad x \quad \text{из} \quad M.$$

Тогда в M существует элемент m со свойством: $m = fm$.

Подмножество A частично упорядоченного множества M называется *началом* множества M, если вместе с каждым элементом y множество A содержит все x из M, предшествующие элементу y.

Отрезок M_z, определенный в M элементом z, состоит из элементов x множества M, предшествующих элементу z. Каждый такой отрезок является началом множества M. Кроме того, все множество M является началом себя самого.

В частности, если M вполне упорядочено, то каждое начало множества M является либо отрезком M_z, либо всем M. Действительно, если некоторое начало A отлично от M и если z — первый из несодержащихся в A, то A — это в точности отрезок M_z.

Пусть теперь M — частично упорядоченное и *замкнутое* множество. Каждая цепь K в M обладает тогда некоторой верхней гранью $g(K)$ в M. Каждый отрезок K_y вновь является некоторой цепью и поэтому обладает верхней гранью $g(K_y)$. Если подмножество K *вполне упорядочено* и для каждого y из K имеет место равенство $y = fg(K_y)$, то K называется *fg-цепью*. Каждое начало любой fg-цепи вновь является fg-цепью.

Пусть K и L — некоторые fg-цепи. Покажем, что если K не является началом множества L, то L — начало множества K.

Начала множества K — это отрезки K_y и само множество K. Так как K вполне упорядочено отношением $x < y$, множество начал вполне упорядочивается отношением $\subset$. Если K не является началом множества L, то существует первое начало A множества K, не являющееся началом множества L.

Если бы в A не было последнего элемента, то для каждого x из A существовал бы y из A со свойством $x < y$, т. е. A было бы объединением собственных начал A_y. Однако таковыми являются начала множества L, и, следовательно, объединение этих частей было бы равно A и было бы началом в L, что противоречит предположению.

Следовательно, мы можем предположить, что A обладает некоторым последним элементом y. Начало $A' = A_y$ является началом в L. Если $L \neq A'$ и если z — первый элемент в L, не принадлежащий множеству A', то

$$K_y = A' = L_z,$$

следовательно,

$$y = fg(K_y) = fg(L_z) = z.$$

Теперь A состоит в точности из A' и y, т. е. A является началом в L_y, что противоречит предположению. Остается лишь одна возможность: $L = A'$ и L является началом в K.

Таким образом, из двух fg-цепей всегда одна является началом другой.

---

[1]) Kneser H. Direckte Ableitung des Zornischen Lemmas aus dem Auswahlaxiom. — Math. Z., 1950, 53, S. 110.

Построим теперь объединение V всех fg-цепей. Тогда:

1) множество V линейно упорядочено и, следовательно, является цепью;

2) множество V вполне упорядочено;

3) в множестве V имеет место равенство $y = fg(V_y)$ для каждого y, т. е. V является fg-цепью;

4) если к V добавить еще один элемент w, то полученное множество $\{V, w\}$ не будет fg-цепью.

Положим $w = fg(V)$ Так как $g(V) \geqslant fg(V) = w$, то элемент w является верхней границей множества V. Если бы w не принадлежало множеству V, то множество $\{V, w\}$ было бы fg-цепью, что противоречит 4). Следовательно, w принадлежит множеству V. Поэтому $w \leqslant g(V)$.

С другой стороны, было известно, что $g(V) \leqslant w$; следовательно,

$$g(V) = w, \quad w = fg(V) = fw,$$

чем и доказывается основная лемма.

Теперь мы предположим выполненной аксиому выбора и докажем принцип максимума.

Пусть M — частично упорядоченное замкнутое множество. Если x — элемент из M, не являющийся максимальным, то множество тех элементов y, для которых $y > x$, не пусто. Согласно аксиоме выбора каждому немаксимальному элементу x можно сопоставить некоторый $fx > x$; для максимального x положим $fx = x$. Согласно основной лемме существует элемент w со свойством $fw = w$. Этот элемент w максимален, чем и доказывается принцип максимума.

70. Теорема Цермело

Наиболее важным следствием аксиомы выбора является теорема Цермело о *полном упорядочении:*

Каждое множество может быть вполне упорядочено.

Цермело дал два доказательства этой теоремы[1]). Первое из них было упрощено Х. Кнезером и состоит в следующем.

Пусть M — некоторое множество. Каждое собственное подмножество N в M имеет непустое дополнение $M \setminus N$. В силу аксиомы выбора существует функция $\varphi(N)$, которая каждому собственному подмножеству N сопоставляет некоторый элемент из $M \setminus N$.

Под φ-*цепью* мы понимаем теперь любое подмножество K в M, вполне упорядоченное таким образом, что для каждого y из K имеет место соотношение

$$y = \varphi(K_y),$$

где K_y — отрезок множества K, состоящий из тех x, которые предшествуют элементу y во вполне упорядоченном множестве K.

Теперь нужно воспользоваться теми же рассуждениями, которые применялись в § 69 при доказательстве основной леммы, но вместо fg-цепей нужно брать φ-цепи. Итак, возьмем объединение V всех φ-цепей и заметим, что множество V вполне упорядочено, множество V является φ-цепью и если к V добавить еще один элемент w, то полученное множество $\{V, w\}$ не будет φ-цепью.

Если $V \neq M$, то в множестве $M \setminus V$ можно взять отмеченный элемент $w = \varphi(V)$ и рассмотреть его как последний элемент в V. Расширенное множество $\{V, w\}$ будет тогда вновь φ-цепью, что противоречит сказанному выше. Тем самым остается одна возможность: множество V совпадает со всем множеством M. Следовательно, множество $M = V$ вполне упорядочено.

---

[1]) Math. Ann., 1904, 59, S. 514; 1908, 65, S. 107.

Важность вполне упорядоченных множеств состоит в возможности применения метода индукции, известного нам по счетным множествам, в случае любых вполне упорядоченных множеств. Этот вопрос рассматривается в следующем параграфе.

§ 71. Трансфинитная индукция

Доказательство с помощью трансфинитной индукции. Чтобы доказать некоторое свойство E для всех элементов вполне упорядоченного множества, можно рассуждать так: докажем, что свойством E обладает любой элемент при условии, что им обладают все элементы, предшествующие этому элементу (в частности, и первый элемент множества). Тогда свойством E должен обладать вообще каждый элемент множества. Действительно, иначе был бы элемент, не обладающий свойством E; но тогда существовал бы и первый элемент e среди не обладающих свойством E. Все предшествующие элементы в этом случае обладали бы свойством E, но тогда и элемент e обладал бы этим свойством, что и дает противоречие.

Построение с помощью трансфинитной индукции. Предположим, что элементам x некоторого вполне упорядоченного множества M требуется сопоставить новые объекты $\varphi(x)$, и предположим, что для этого мы располагаем «рекуррентным определяющим соотношением», которое связывает каждое значение $\varphi(a)$ со значениями $\varphi(b)$ $(b<a)$. Предположим, что это соотношение определяет $\varphi(a)$ однозначно, как только определены все $\varphi(b)$ $(b<a)$, которые между собой связаны тем же соотношением. Вместо одного соотношения может быть задана также и система соотношений.

Теорема. *При сделанных предположениях существует одна и только одна функция $\varphi(x)$, значения которой удовлетворяют заданному соотношению.*

Докажем сначала единственность. Предположим противное: существуют различные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, удовлетворяющие определяющему соотношению. Тогда должен существовать первый элемент a, для которого $\varphi(a)\neq\psi(a)$. Для всех $b<a$ равенство $\varphi(b)=\psi(b)$ оказывается выполненным. В силу предположения о том, что заданное соотношение определяет значение $\varphi(a)$ однозначно по всем предыдущим $\varphi(b)$, должно иметь место равенство $\varphi(a)=\psi(a)$, что противоречит предположению.

Чтобы доказать существование, рассмотрим отрезки A множества M. (Отрезок A — это по-прежнему множество элементов, предшествующих некоторому элементу a.) Они составляют вполне упорядоченное множество (с отношением $A\subset B$ как отношением порядка); действительно, каждому элементу a взаимно однозначно соответствует отрезок A, состоящий из тех x, для которых $x<a$, и из $b<a$ следует $B\subset A$. Возьмем в качестве последнего отрезка

само множество M; тогда множество отрезков окажется вполне упорядоченным.

Теперь мы хотим доказать индукцией по A, что на каждом из A существует функция $\varphi(x) = \varphi_A(x)$ (определенная для всех x из A), удовлетворяющая заданным соотношениям. Пусть этот факт существования уже доказан для всех отрезков, предшествующих заданному отрезку A. Есть только два случая:

1. Отрезок A обладает последним элементом a. На множестве A', которое получается из A отбрасыванием элемента a, функция $\varphi(x)$ уже определена, потому что A' предшествует отрезку A. Но с помощью совокупности значений $\varphi(b)$ $(b < a)$ и с помощью заданного соотношения определяется значение $\varphi(a)$. Если выбрать его, то функция φ будет определена на всех элементах отрезка A и на всех этих элементах без исключения будет удовлетворять заданному соотношению.

2. Отрезок A не имеет последнего элемента. Таким образом, каждый элемент a из A принадлежит уже предшествующему отрезку B. Но на каждом предшествующем отрезке B функция φ_B уже определена. Мы хотим определить:

$$\varphi(a) = \varphi_B(a);$$

для этого сначала нужно доказать, что функции φ_B, φ_C, ..., соответствующие различным отрезкам, совпадают в каждой общей точке этих отрезков. Пусть, следовательно, B и C — различные отрезки и пусть, например, $B \subset C$. Тогда φ_B и φ_C определены на B и удовлетворяют заданным соотношениям; следовательно, они совпадают (в силу теоремы единственности, которая уже была доказана). Таким образом, определение $\varphi(a) = \varphi_B(a)$ приобретает однозначный смысл. То, что так построенная функция удовлетворяет заданным соотношениям, очевидно, потому что таковыми являются все функции φ_B.

Таким образом, как в случае 1, так и в случае 2 существует функция φ на A с заданными свойствами, а потому доказано существование функции φ на любом отрезке. В частности, в качестве такого отрезка можно взять само множество M; утверждение доказано.