ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Топологическая алгебра — это учение о группах, кольцах и телах, которые одновременно являются топологическими пространствами и в которых алгебраические операции непрерывны в смысле этой топологии. Такие группы, кольца и тела называют топологическими, или кратко — Т-группами, Т-кольцами и Т-телами.

§ 158. Понятие топологического пространства

Топологическое пространство — это множество T, в котором выделены некоторые подмножества, названные *открытыми множествами*. Они должны обладать следующими свойствами:

I. *Пересечение конечного числа открытых множеств вновь является открытым множеством.*

II. *Объединение любого множества открытых множеств вновь является открытым множеством.*

Примеры. 1. Пусть T — произвольное упорядоченное множество, которое содержит более одного элемента. *Открытый интервал в* T определяется условием $a < x < b$, или условием $a < x$, или условием $x < b$. *Открытое множество* — это такое множество, которое вместе с каждым своим элементом y содержит и некоторый открытый интервал, в который входит y.

2. Пусть T — поле комплексных чисел. *Круг* с центром в точке a определим условием $|z-a| < \varepsilon$. Открытым множеством назовем любое такое множество, которое вместе с каждым своим элементом a содержит и некоторый круг с центром в a.

3. То же определение проходит для любого нормированного поля, только нужно использовать $\varphi(z-a)$ вместо $|z-a|$. Каждое нормированное поле является, следовательно, топологическим пространством.

Из I, в частности, следует, что все пространство T открыто, потому что оно является пересечением пустого множества открытых множеств. Равным образом, из II следует, что пустое множество открыто, потому что оно является объединением пустого множества открытых множеств.

Подмножество M называется *замкнутым множеством в топологическом пространстве* T, если его дополнение открыто Для замкнутых множеств имеют место правила, эквивалентные I и II:

I′. *Объединение конечного множества замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

II′. *Пересечение любого множества замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Элементы множества T называются *точками* пространства T. Открытое множество, содержащее точку p, называется *открытой окрестностью точки* p. Произвольное множество, содержащее открытую окрестность точки p, называется *окрестностью точки* p и обозначается через $U(p)$.

Подмножество T' топологического пространства T само является топологическим пространством, если считать открытыми множествами в T' пересечения с T' открытых множеств из T. Свойства I и II, конечно, выполняются в T'.

Замкнутая оболочка $\bar{M}$ подмножества M топологического пространства T — это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество M.

Задача 1. Точка p тогда и только тогда принадлежит оболочке $\bar{M}$, когда каждая окрестность точки p имеет с M общую точку.

Задача 2. Куратовский определяет топологическое пространство как такое множество T, в котором каждому подмножеству M сопоставлена оболочка $\bar{M}$ со следующими свойствами:

а) оболочка объединения $M \cup N$ есть объединение оболочек $\bar{M} \cup \bar{N}$;

б) множество $\bar{M}$ содержит множество M;

в) оболочкой множества $\bar{M}$ является само $\bar{M}$;

г) оболочка пустого множества есть пустое множество.

Далее он определяет: если $\bar{M} = M$, то множество M называется *замкнутым*, а если дополнение до некоторого множества M в T замкнуто, то M называется *открытым*. Доказать, что определение Куратовского равносильно изложенному здесь определению топологического пространства.

Указание. Из а) прежде всего следует, что если $M \subseteq N$, то $\bar{M} \subseteq \bar{N}$. После этого из а), б), в) получаем, что $\bar{M}$ является пересечением всех замкнутых множеств $\bar{N} = N$, содержащих M. Отсюда получаются свойства I′ и II′. Обратно, а), б), в) следуют из I′ и II′.

Множество M называется *плотным подмножеством* в T, если замкнутая оболочка множества M равна T или, что то же самое, если в каждой окрестности любой точки из T лежат точки из M.

§ 159. Базисы окрестностей

Система окрестностей $U(p)$ точки p образует *базис окрестностей точки* p, если в каждой окрестности этой точки содержится некоторая окрестность $U(p)$ из рассматриваемой системы. Для того чтобы быть базисом, системе достаточно быть такой, чтобы в каждой открытой окрестности точки p содержалась некоторая окрестность $U(p)$ из этой системы. Например, открытые окрестности точки p составляют базис окрестностей этой точки. В нашем примере 1 открытые интервалы, содержащие точку p, составляют

базис окрестностей этой точки. В примере 2 круги с центром в a составляют базис окрестностей точки a.

Часто топологические пространства определяются тем, что сначала задается базис окрестностей каждой точки, а затем вводятся открытые множества с помощью этого базиса так, как это было сделано в рассмотренных выше примерах. Таким образом, каждой точке p сопоставляют некоторые *базисные множества* $U(p)$, обладающие следующими свойствами:

U_1. *Каждой точке p сопоставляются базисные множества $U(p)$, каждое из которых содержит точку p.*

U_2. *Для каждых двух базисных множеств $U(p)$ и $V(p)$ существует базисное множество $W(p)$, которое содержится в каждом из них.*

С помощью этих базисных множеств теперь можно определить *открытые множества* M как такие, которые вместе с каждой точкой p содержат некоторое базисное множество $U(p)$. Определенные таким способом открытые множества обладают, очевидно, свойствами I и II; следовательно, оказывается определенным некоторое топологическое пространство. Чтобы базисные множества $U(p)$ оказались окрестностями в смысле введенной топологии, они должны удовлетворять некоторому дополнительному условию. Одно достаточное условие получается, если потребовать, чтобы сами $U(p)$ были открытыми множествами:

U_3. *Если q принадлежит $U(p)$, то $U(p)$ содержит некоторое базисное множество $V(q)$.*

Следующее, более слабое, условие является необходимым и достаточным:

U_3'. *Любое базисное множество $U(p)$ содержит такое базисное множество $V(p)$, что для каждой точки q из $V(p)$ некоторое базисное множество $W(q)$ содержится в $U(p)$.*

Если выполнено U_3', то внутри $U(p)$ можно определить множество U', состоящее из таких точек q, что одно из базисных множеств $W(q)$ каждой точки принадлежит множеству $U(p)$. Очевидно, это множество открыто и содержит p. Следовательно, $U(p)$ содержит открытую окрестность точки p, т. е. $U(p)$ — некоторая окрестность точки p.

Слова «базисные множества» нам теперь больше не нужны: в дальнейшем мы будем называть базисные множества $U(p)$ *базисными окрестностями*. Совокупность всех базисных окрестностей всех точек p называется *базисом окрестностей* или *системой окрестностей* топологического пространства T.

Понятие системы окрестностей восходит к Хаусдорфу, который рассматривал только открытые окрестности. Требования U_1, U_2, U_3 — это в точности первые три аксиомы Хаусдорфа об окрестностях. Четвертая аксиома Хаусдорфа — аксиома отделимости — будет сформулирована в § 161.

Пример 4. Определим в n-мерном векторном пространстве над полем вещественных чисел *куб* со стороной 2ε вокруг вектора

$(b_1, \ldots, b_n)$ как совокупность векторов $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых

$$|a_i - b_i| < \varepsilon.$$

Кубы удовлетворяют условиям U_1, U_2, U_3. Векторное пространство является, таким образом, топологическим пространством, в котором кубы служат базисом окрестностей.

Топологическое пространство называется *дискретным*, если все его подмножества являются открытыми множествами. Отдельные точки в таком пространстве составляют некоторую систему окрестностей.

Задача 1. Для того чтобы две системы множеств $U(p)$ и $V(p)$ определяли одно и то же топологическое пространство, необходимо и достаточно, чтобы каждое множество $U(p)$ содержало некоторое множество $V(p)$, а каждое множество $V(p)$ содержало некоторое множество $U(p)$.

Задача 2. Топология векторного пространства, определенная с помощью кубов, не зависит от выбора базиса в этом пространстве.

§ 160. Непрерывность. Пределы

Функция $p' = f(p)$, отображающая топологическое пространство T в топологическое пространство T', называется *непрерывной в точке* p_0, если для каждой окрестности U' точки $f(p_0)$ в T' существует окрестность U точки p_0 в T, образ которой целиком содержится в U'.

Аналогично функция $f(p, q)$ аргументов p и q, пробегающих топологические пространства T_1 и T_2 соответственно, со значениями в некотором топологическом пространстве T_3 называется *непрерывной в точке* (p_0, q_0), если для каждой окрестности W точки $f(p_0, q_0)$ существуют такие окрестности U и V точек p_0 и q_0, что $f(p, q)$ принадлежит W всякий раз, когда p принадлежит U, а q принадлежит V.

Если функция непрерывна в каждой точке, то говорят, что она *непрерывна* или *задает непрерывное отображение*. Отображение $p' = f(p)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества U' в T' (т. е. множество элементов из T, образы которых принадлежат U') является открытым множеством.

Взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение топологического пространства T на топологическое пространство T' называется *топологическим*. Любое топологическое отображение переводит открытые множества в открытые, а замкнутые — в замкнутые.

Последовательность $\{p_\nu\}$ точек в топологическом пространстве T называется *сходящейся к пределу* p, если каждая окрестность $U(p)$ содержит все члены этой последовательности, начиная

с некоторого номера:

$$p_\nu \in U(p) \quad \text{при} \quad \nu \geqslant k.$$

При этом можно ограничиться окрестностями $U(p)$ из некоторого базиса окрестностей точки p, так как каждая окрестность содержит некоторую окрестность из базиса.

Задача 1. Непрерывное отображение переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся.

Задача 2. Непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна.

§ 161. Аксиомы отделимости и счетности

Важнейшие топологические пространства удовлетворяют не только аксиомам I и II, но и следующей первой аксиоме отделимости:

T_1. *Если $p \neq q$, то существует окрестность точки p, не содержащая точку q.*

Пространство, удовлетворяющее аксиоме T_1, называется *T_1-пространством*. Следующая формулировка эквивалентна:

Замкнутая оболочка любой точки есть сама эта точка.

Более сильной, чем T_1, является следующая вторая аксиома отделимости или аксиома Хаусдорфа:

T_2. *Если $p \neq q$, то существуют окрестности $U(p)$ и $V(q)$, не имеющие ни одной общей точки.*

Если выполнена аксиома T_2, то пространство называется *хаусдорфовым* или *T_2-пространством*.

Первая аксиома счетности звучит так:

A_1. *Каждая точка p обладает счетным базисом окрестностей.*

Более сильная вторая аксиома счетности нам не потребуется.

Важные для дальнейшего изложения топологические пространства удовлетворяют первой аксиоме отделимости и первой аксиоме счетности. Для топологических групп, а потому и для топологических колец и тел (являющихся одновременно и аддитивными группами) вторая аксиома отделимости будет получена как следствие первой.

В представленном здесь введении в топологию затронуты лишь самые необходимые основные понятия. Тем, кто хотел бы узнать о топологии больше, имеет смысл обратиться к великолепному учебнику Александрова и Хопфа (Alexandroff P. S. und Hopf H.). Topologie, I. — Springer-Verlag, 1935, а затем к более современной литературе.

Задача 1. В хаусдорфовом пространстве любая последовательность точек $\{p_\nu\}$ может обладать лишь одним пределом.

Задача 2. Если имеет место аксиома A_1, то замкнутая оболочка любого множества M состоит из всех пределов сходящихся последовательностей $\{p_\nu\}$ из M. Множество M замкнуто, если все эти пределы лежат в M.

§ 162. Топологические группы

Топологическая группа (или коротко — Т-*группа*) — это топологическое пространство, которое одновременно является группой, причем xy является непрерывной функцией от x и y и x^{-1} является непрерывной функцией от x. Таким образом, к четырем аксиомам группы и двум аксиомам открытых множеств в данном случае добавляются следующие:

TG_1. *Для каждой окрестности $U(ab)$ произведения ab существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$, произведение $V(a)W(b)$ которых содержится в $U(ab)$.*

TG_2. *Для каждой окрестности $U(a^{-1})$ существует такая окрестность $V(a)$, что $V(a)^{-1}$ содержится в $U(a^{-1})$.*

При этом через M^{-1} обозначается множество элементов x^{-1}, обратных к элементам x из M.

Очевидно, достаточно потребовать выполнение аксиом TG_1 и TG_2 для окрестностей U некоторого базиса окрестностей, и выбрать $V(a)$ и $W(b)$ тоже из этого базиса.

Вот примеры топологических групп:

а) аддитивная группа поля вещественных или поля комплексных чисел;

б) n-мерное вещественное пространство (§ 159, пример 4);

в) мультипликативная группа вещественных чисел или комплексных чисел, отличных от нуля.

Каждая группа становится *дискретной топологической группой*, если на множестве ее элементов взять дискретную топологию, т. е. объявить все множества открытыми.

Дальнейшие примеры см. в § 163, задача, и § 164, пример 5.

Из TG_1 и TG_2 легко следуют утверждения:

TG′. *Для каждой окрестности $U(a^{-1}b)$ существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$ такие, что $V(a)^{-1}W(b)$ содержится в $U(a^{-1}b)$.*

TG″. *Для каждой окрестности $U(ab^{-1})$ существуют окрестности $V'(a)$ и $W'(b)$ такие, что $V'(a)W'(b)^{-1}$ содержится в $U(ab^{-1})$.*

Задача. Доказать, что каждое из требований TG′ и TG″ может заменить оба требования TG_1 и TG_2.

Докажем теперь следующее:

Каждая T_1-группа является T_2-группой.

Доказательство. Пусть $a \neq b$, так что $a^{-1}b \neq e$. В силу T_1 существует окрестность $U(a^{-1}b)$, не содержащая e. Согласно TG′ существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$ такие, что $V(a)^{-1}W(b)$ принадлежит $U(a^{-1}b)$, а потому это произведение не содержит e. Но тогда существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$, не имеющие ни одной общей точки. Этим доказано T_2.

Тем же методом доказывается следующее утверждение:

Если в некоторой Т-группе существует окрестность точки p, не содержащая точку q, то существуют две окрестности $U(p)$

и $V(q)$ без общих элементов, и, таким образом, существует окрестность $U(q)$, не содержащая точку p. В этом случае элементы p и q называют *отделимыми друг от друга.* Точки q, которые неотделимы от точки p, составляют замкнутую оболочку множества $\{p\}$.

Две Т-группы G и H называются *топологически изоморфными*, если существует изоморфизм этих групп, являющийся одновременно топологическим отображением из G на H.

§ 163. Окрестности единицы

Если задан базис окрестностей единицы e, то тем самым задаются все окрестности этого элемента: таковыми будут множества $U(e)$, которые содержат по крайней мере одну из базисных окрестностей. Но тогда оказываются известными окрестности и других точек, потому что если $U(e)$ — окрестность единицы e, то $aU(e)$ — окрестность точки a и все окрестности точки a могут быть представлены в таком виде. Можно называть $aU(e)$ «сдвинутой на a окрестностью точки e».

Таким образом, мы видим, что топология Т-группы полностью определяется заданием базиса окрестностей единицы e. Будем обозначать окрестности такого базиса через U, V, W, ...

Какими свойствами должны обладать указанные выше множества U, чтобы группа G с окрестностями $U(a) = aU(e)$ была топологической?

Следующие свойства являются во всяком случае необходимыми:

E_1. *Каждое множество U содержит e* (следует из U_1 § 159).

E_2. *Для каждого U существует V такое, что $V \cdot V$ содержится в U.*

E_3. *Для каждого U существует V такое, что V^{-1} содержится в U* (следует из TG_2 § 162).

E_4. *Каждое сопряженное множество aUa^{-1} содержит некоторое множество V.*

E_5. *Каждое пересечение $U \cap V$ содержит некоторое W* (следует из U_2 § 159).

Доказательство E_2. В силу TG_1 для U существуют некоторое V' и некоторое W' такие, что $V'W'$ содержится в окрестности U. Согласно U_2 пересечение $V' \cap W'$ содержит V.

Доказательство E_4. Так как $a^{-1}xa$ — непрерывная функция элемента x, то для U существует окрестность V такая, что $a^{-1}Va$ содержится в U, так что V содержится в aUa^{-1}.

Пусть теперь наоборот — задана система множеств U в группе G, которые удовлетворяют требованиям $E_1 - E_5$. Построим сдвиги aU и будем считать их базисом окрестностей точки a. Очевидно, эти базисные окрестности обладают свойствами U_1 и U_2 (§ 159). Покажем, что они обладают и свойством U_3'.

Пусть, таким образом, $U(a) = aU$. Согласно E_2 существует множество V такое, что $V \cdot V$ содержится в U. Если теперь x — точка из aV, то xV содержится в aVV, а потому и в aU. Тем самым U_3' доказано.

Теперь мы должны доказать TG_1 и TG_2 (§ 162).

Пусть дана произвольная окрестность abU. Согласно E_2 существует такое множество V, что $V \cdot V$ принадлежит U. Согласно E_4 в bVb^{-1} существует некоторое W. Поэтому

$$aW \cdot bV \subseteq a \cdot bVb^{-1} \cdot bV = abVV \subseteq abU,$$

чем и доказывается TG_1.

Пусть дана произвольная окрестность $a^{-1}U$. Существует такое множество V, что V^{-1} принадлежит U. Кроме того, существует множество W, принадлежащее $a^{-1}Va$.

Имеет место включение $aW \subset Va$, так что

$$(aW)^{-1} \subseteq (Va)^{-1} = a^{-1}V^{-1} \subseteq a^{-1}U,$$

чем и доказывается TG_2.

Следовательно, для того чтобы превратить группу в Т-группу, нужно задать базис окрестностей единицы и доказать $E_1 - E_5$.

Свойства E_2 и E_3 могут быть объединены в одно:

E_{2+3}. *Для каждого множества U существует V, удовлетворяющее соотношению $V^{-1}V \subseteq U$.*

В случае абелевых групп свойство E_4 излишне. Если группа записывается аддитивно, то вводятся окрестности нуля и три следующих требования:

1. *Каждое множество U содержит нуль.*

2. *Для каждого U существует V, удовлетворяющее условию $V - V \subseteq U$.*

3. *Каждое пересечение $U \cap V$ содержит некоторую окрестность W.*

Для того чтобы Т-группа, определенная с помощью окрестностей единицы, была T_1-группой, должна выполняться следующая аксиома отделимости:

E_6. *Для каждого элемента $a \neq e$ существует окрестность U, не содержащая a.*

Требования E_1 и E_6 можно объединить в одно:

Пересечение всех окрестностей U состоит из одной лишь единицы.

Соответствующее требование для аддитивных групп:

Пересечение всех окрестностей U содержит только нуль.

Если G не является T_1-группой, то, кроме e, существуют и другие элементы p, принадлежащие всем окрестностям единицы e, а потому не отделимые от e. Очевидно, эти элементы составляют некоторую нормальную подгруппу N в G. Согласно § 162 под-

группа N является замкнутой оболочкой множества $\{e\}$, поэтому подгруппа N замкнута. Факторгруппа G/N является T_1-группой.

Задача. Пусть в группе G задана последовательность содержащихся друг в друге нормальных подгрупп:

$$H_1 \supset H_2 \supset \ldots$$

Если базисными окрестностями единицы объявить эти нормальные подгруппы, то свойства $E_1 - E_5$ будут выполнены и G окажется Т-группой. Свойство E_6 будет выполнено только тогда, когда пересечение всех H_i состоит из одной единицы.

§ 164. Подгруппы и факторгруппы

Каждая подгруппа в Т-группе снова является Т-группой. Особенно важными являются замкнутые подгруппы.

Каждая открытая подгруппа является замкнутой.

Доказательство. Пусть H — открытая подгруппа в G. Смежные классы aH также открыты в G. Объединение всех смежных классов, не считая H, вновь является открытым. Это объединение является дополнением для подгруппы H; следовательно, H замкнута.

Пример 5. Пусть R — кольцо всех матриц из n строк и n столбцов над полем вещественных чисел. Обратимыми элементами в R являются те матрицы A, которые обладают обратной матрицей A^{-1}. Обратимые матрицы составляют некоторую группу G. Определим кубическую окрестность произвольной матрицы A как совокупность матриц B, для которых

$$|b_{ik} - a_{ik}| < \varepsilon$$

(см. § 159, пример 4); тогда R будет аддитивной, а G — мультипликативной топологической группой. В группе G можно рассмотреть подгруппу матриц A с положительными определителями D. Эта подгруппа в G открыта, а потому и замкнута.

Пусть H — произвольная нормальная подгруппа в G. Замкнутость этой подгруппы пока не предполагается. Построим факторгруппу

$$G/H = \bar{G}.$$

При гомоморфном отображении $a \longmapsto \bar{a}$ группы G на группу $\bar{G}$ базисные окрестности U единицы e переходят в некоторые подмножества $\bar{U}$ группы $\bar{G}$, тривиальным образом удовлетворяющие условиям $E_1 - E_5$. Тем самым множества $\bar{U}$ определяют на $\bar{G}$ некоторую топологию. В смысле этой топологии отображение $a \longmapsto \bar{a}$ непрерывно, что следует непосредственно из определения непрерывности. Таким образом,

Каждая факторгруппа топологической группы является топологической и отображение $a \longmapsto \bar{a}$ при этом непрерывно.

Выясним теперь, при каких условиях факторгруппа удовлетворяет первой аксиоме отделимости T_1. Вот ответ:

Если нормальная подгруппа H в G является замкнутой подгруппой, то G/H является T_1-группой и наоборот.

Доказательство. Пусть H — замкнутая в G нормальная подгруппа. В этом случае каждый смежный класс aH является замкнутым в G. Если $\bar{a} \neq \bar{e}$, то e не принадлежит классу aH, т. е. e принадлежит открытому дополнению класса aH. Следовательно, существует некоторая окрестность U точки e, не имеющая с aH ни одной общей точки. Образ $\bar{U}$ в группе $\bar{G}$ тогда не содержит элемента $\bar{a}$. Следовательно, группа $\bar{G}$ удовлетворяет условию E_6; поэтому $\bar{G}$ является T_1-группой.

Пусть теперь $\bar{G}$ — T_1-группа. Тогда множество элементов $\bar{a} \neq \bar{e}$ открыто в $\bar{G}$. Так как отображение $a \longmapsto \bar{a}$ непрерывно, прообраз этого открытого множества открыт. Однако этот прообраз является дополнением до подгруппы H в исходной группе G. Следовательно, подгруппа H замкнута в G.

Задача. Пусть H — подгруппа и N — нормальная подгруппа в G. Если N замкнута в G, то пересечение $D = N \cap H$ замкнуто в H и естественный изоморфизм между H/D и NH/N непрерывен.

§ 165. Т-кольца и Т-тела

Топологическое кольцо (кратко — Т-*кольцо*) — это топологическое пространство, которое одновременно является кольцом, причем $x+y$, $-x$ и xy являются непрерывными функциями своих аргументов. Вместо этого можно предполагать, что $x-y$ и xy — непрерывные функции от x и y. Следовательно:

TR_1. *Для каждой окрестности $U(a-b)$ существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$ такие, что все разности элементов из $V(a)$ и из $W(b)$ принадлежат $U(a-b)$.*

TR_2. *Для каждой окрестности $U(ab)$ существуют окрестности $V(a)$ и $W(b)$ такие, что все произведения элементов из $V(a)$ и $W(b)$ принадлежат $U(ab)$.*

При определении Т-*тела* требуется, кроме того, чтобы x^{-1} было непрерывной функцией от x, т. е. следующее условие:

TS. *Для каждой окрестности $U(a^{-1})$ существует окрестность $V(a)$ такая, что элементы, обратные к содержащимся в ней элементам, принадлежат $U(a^{-1})$.*

Если выполнена аксиома TS, то говорят, что топология кольца является *топологией тела*.

Разумеется, коммутативные Т-тела называются Т-*полями*.

Всякое кольцо является абелевой группой относительно сложения. Чтобы определить топологию на этой группе, согласно § 162 достаточно определить базис окрестностей U, V, ... нуля,

который удовлетворял бы условиям 1, 2 и 3 (§ 163). Чтобы умножение также было непрерывно, нужно потребовать следующее:

4. *Для a, b и U существуют такие V, W, что*

$$(a+V)(b+W) \subseteq ab+U.$$

Топологическое тело должно, кроме того, удовлетворять следующему условию, эквивалентному TS:

Для элемента, отличного от нуля, и окрестности U существует такая окрестность V, что

$$(a+V)^{-1} \subseteq a^{-1}+U. \tag{1}$$

Можно положить $aU=U'$ и $Va^{-1}=V'$, так что $U=a^{-1}U'$ и $V=V'a$. Тогда из (1) будет следовать, что

$$a^{-1}(1+V')^{-1} \subseteq a^{-1}(1+U')$$

или

$$(1+V')^{-1} \subseteq 1+U'. \tag{2}$$

Поэтому достаточно устанавливать справедливость условия (1) только для $a=1$. Следовательно, аксиома TS эквивалентна следующему условию:

5. *Для каждой окрестности U нуля существует другая окрестность V нуля такая, что*

$$(1+V)^{-1} \subseteq 1+U. \tag{3}$$

Примерами T-полей могут служить нормированные поля и, в частности, поле вещественных чисел, поле комплексных чисел или поле p-адических чисел, а также их всевозможные подполя.

Топологическим кольцом является и кольцо всех вещественных $(n\times n)$-матриц. Базис окрестностей нуля состоит в этом случае из множеств U, состоящих из матриц, элементы которых по абсолютной величине меньше заданного положительного числа ε.

Дальнейшие условия получаются при рассмотрении в произвольном кольце $\mathfrak{o}$ некоторой последовательности двусторонних идеалов, содержащихся друг в друге,

$$\mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \ldots;$$

эти идеалы можно принять за базис окрестностей нуля. Условия 1—4 тогда будут выполнены. Топологическое T_1-кольцо получается при такой конструкции тогда, когда пересечение всех $\mathfrak{g}_\nu$ равно нулю.

Топологию кольца, определенную с помощью последовательности $\{\mathfrak{g}_\nu\}$, называют *$\{\mathfrak{g}_\nu\}$-адической топологией*. Если, в частности, $\mathfrak{g}_\nu$ — это степени некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ в коммутативном кольце $\mathfrak{o}$:

$$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}^2 \supseteq \mathfrak{p}^3 \supseteq \ldots,$$

то говорят о $\mathfrak{p}$-*адической топологии*. Позднее мы увидим, что во многих важных случаях пересечение степеней идеала $\mathfrak{p}$ равно нулевому идеалу. Во всех таких случаях, следовательно, имеет место аксиома отделимости T_1.

В § 141 последовательность степеней $\mathfrak{p}^\nu$ простого идеала $\mathfrak{p}$ была при более сильных условиях использована для определения некоторого нормирования кольца $\mathfrak{o}$. Однако если не предполагается рассматривать нормирование, а имеется в виду лишь топология на кольце, то эти более сильные условия излишни.

Задача 1. Условие 4 можно разбить на несколько более частных условий:
а) для a и U существует окрестность V такая, что $aV \subseteq U$;
б) для b и U существует окрестность V такая, что $Vb \subseteq U$;
в) для U существует окрестность V такая, что $VV \subseteq U$.

Задача 2. В теле кватернионов над полем вещественных чисел (§ 93, пример 2) можно следующим образом ввести окрестности нуля: U_ε состоит из кватернионов $a+bj+ck+dl$ с нормой

$$(a-bj-ck-dl)(a+bj+ck+dl)=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

меньшей ε. Доказать, что тело кватернионов с этой топологией является T_1-телом.

§ 166. Пополнение групп с помощью фундаментальных последовательностей

В § 142 для каждого нормированного поля было построено его расширение, в котором выполнялась теорема Коши о сходимости. Вспомогательным средством при этом служили фундаментальные последовательности $\{a_\nu\}$, которые характеризовались тем, что $a_\nu - a_\mu$ при достаточно больших ν и μ принадлежат произвольной окрестности нуля. Проведем теперь аналогичную конструкцию для Т-групп, следуя методу ван Данцига[1]).

Последовательность $\{x_\nu\}$ в некоторой Т-группе называется *последовательностью Коши* или *фундаментальной последовательностью*, если произвольная окрестность единичного элемента группы содержит элементы $x_\mu^{-1}x_\nu$ при $\mu \geqslant m$ и $\nu \geqslant m$.

Топологическая группа называется *слабо полной*, если каждая фундаментальная последовательность в ней имеет в ней же предел.

Зададимся теперь следующей целью: расширить произвольную Т-группу, удовлетворяющую аксиомам T_1 и A_1, до некоторой слабо полной Т-группы.

Доказательством следующей леммы я обязан Г. Р. Фишеру. Окрестности единицы, как и раньше, будут обозначаться через U, V, ...

Лемма. *Пусть $\{x_\nu\}$ — произвольная фундаментальная последовательность. Тогда для каждого U существуют такое натуральное*

---

[1]) van Dantzig D. Zur topologischen Algebra, I: Komplettirungtheorie. — Math. Ann., 1933, **107**, S. 587.

m и такое V, что

$$x_\mu^{-1} V x_\mu \subseteq U \quad \text{для} \quad \mu \geqslant m. \tag{1}$$

Доказательство. Выберем окрестность W так, чтобы $WWW \subseteq U$. Выберем далее m так, чтобы было

$$x_\mu^{-1} x_\nu \in W \quad \text{для} \quad \mu \geqslant m, \quad \nu \geqslant m.$$

Тогда, в частности, $x_\mu^{-1} x_m$ и $x_m^{-1} x_\mu$ принадлежат W при $\mu \geqslant m$. Согласно E_4 окрестность V можно выбрать внутри $x_m W x_m^{-1}$. Тогда

$$x_\mu^{-1} V x_\mu \subseteq x_\mu^{-1} x_m W x_m^{-1} x_\mu \subseteq WWW \subseteq U \quad \text{для} \quad \mu \geqslant m.$$

Из этой леммы следует:

I. *Если $\{x_\mu\}$ и $\{y_\mu\}$ — фундаментальные последовательности, то и $\{x_\mu y_\mu\}$ — фундаментальная последовательность.*

Доказательство. Имеем

$$(x_\mu y_\mu)^{-1} x_\nu y_\nu = y_\mu^{-1} (x_\mu^{-1} x_\nu) y_\mu \cdot y_\mu^{-1} y_\nu.$$

В произведении справа оба сомножителя принадлежат сколь угодно малым окрестностям единицы e: первый сомножитель в силу леммы, а второй в силу определения фундаментальной последовательности. Следовательно, произведение тоже принадлежит сколь угодно малой окрестности единицы U. Последовательность $\{x_\mu y_\mu\}$ называется *произведением* фундаментальных последовательностей $\{x_\mu\}$ и $\{y_\mu\}$.

Вот другое следствие доказанной леммы:

II. *Если $\{x_\mu\}$ — фундаментальная последовательность и $\{y_\mu\}$ стремится к единице, то и*

$$\{x_\mu^{-1} y_\mu x_\mu\}$$

стремится к единице.

Доказательство. Согласно лемме $x_\mu^{-1} V x_\mu \subseteq U$ при подходящем V и достаточно больших μ и y_μ принадлежит V при достаточно больших μ, так что $x_\mu^{-1} y_\mu x_\mu$ принадлежит U для достаточно больших μ.

Для того чтобы группа G могла быть расширена до некоторой слабо полной топологической группы, необходимо, чтобы имела место следующая аксиома слабой пополняемости:

TG_3. *Если $\{x_\mu\}$ — произвольная фундаментальная последовательность, то и $\{x_\mu^{-1}\}$ — фундаментальная последовательность.*

В абелевой группе аксиома TG_3 выполнена автоматически, потому что если $x_\mu^{-1} x_\nu$ принадлежит U, то и

$$x_\nu x_\mu^{-1} = x_\mu^{-1} x_\nu$$

принадлежит U. В общем же случае аксиома TG_3 не является следствием остальных аксиом.

Из I и TG_3 немедленно следует, что фундаментальные после-

довательности образуют некоторую группу F. Единичным элементом этой группы F является последовательность $\{e\}$.

Превратим теперь группу F в топологическую, определив базисные окрестности $\bar{U}$ единичного элемента $\{e\}$ следующим образом: $\bar{U}$ состоит из фундаментальных последовательностей $\{x_\nu\}$, элементы которых при достаточно больших ν принадлежат U.

Эти окрестности $\bar{U}$ удовлетворяют требованиям $E_1 - E_5$ (§ 163). Для $E_1 - E_3$ и E_5 это само собой очевидно, а E_4 — это в точности доказанная выше лемма: если $\{x_\mu\}$ — фундаментальная последовательность, то существует окрестность V такая, что

$$x_\mu^{-1} V x_\mu \subseteq U \quad \text{или} \quad V \subseteq x_\mu U x_\mu^{-1}$$

для достаточно больших μ.

Итак, F — топологическая группа. В этой группе последовательности, сходящиеся к e, составляют подгруппу, которая в силу II является даже некоторой нормальной подгруппой N. Докажем теперь, что подгруппа N замкнута в F.

Если фундаментальная последовательность $\{x_\mu\}$ не принадлежит N, т. е. не сходится к e, то существует некоторая окрестность U, которая не содержит почти всех элементов данной последовательности. Согласно E_1 и E_3 существует такая окрестность V, что

$$VV^{-1} \subseteq U.$$

Эта окрестность V определяет некоторую окрестность $\bar{V}$ в F, состоящую из всех фундаментальных последовательностей $\{y_\mu\}$, почти все элементы y_μ которых принадлежат V. Мы утверждаем теперь, что окрестность $\{x_\mu\}\bar{V}$ последовательности $\{x_\mu\}$ в F полностью содержится в дополнении к N в группе F.

Действительно, иначе $\{x_\mu\}\bar{V}$ содержала бы фундаментальную последовательность

$$\{x_\mu\}\{y_\mu\} = \{x_\mu y_\mu\} = \{z_\mu\},$$

принадлежащую N, где y_μ почти все лежат в V и $\{z_\mu\}$ сходится к e. Но тогда почти все z_μ лежат в V, и почти все элементы

$$x_\mu = z_\mu y_\mu^{-1}$$

принадлежат VV^{-1}, а потому и окрестности U, что противоречит определению окрестности U. Следовательно, $\{x_\mu\}\bar{V}$ и N не имеют общих элементов.

Таким образом, дополнение к N в F является открытым множеством, т. е. N — замкнутое множество в F. Отсюда в силу § 164 следует, что F/N является T_1-группой.

Внутри группы F фундаментальные последовательности $\{a\}$, состоящие из одного и того же элемента a, составляют некоторую подгруппу G', топологически изоморфную данной группе G.

В силу аксиомы отделимости T_1 эта подгруппа имеет только один общий с N элемент $\{e\}$. Мы можем отождествить постоянные последовательности $\{a\}$ с элементами a и тем самым группу G с группой G'. Если теперь построить смежные классы по N, то G' перейдет в некоторую факторгруппу G'', которая является подгруппой в F/N и, следовательно, некоторой Т-группой. Эта Т-группа топологически изоморфна G', а потому и G, и поэтому вновь может быть отождествлена с G.

Положим $F/N = \tilde{G}$. Группа G вложена в T_1-группу $\tilde{G}$. Докажем прежде всего следующее:

III. *Если фундаментальная последовательность* $\{x_\mu\}$ *определяет элемент* $\tilde{x}$ *из* $\tilde{G}$, *то*

$$\lim x_\mu = \tilde{x}. \tag{2}$$

Доказательство. Фундаментальная последовательность $\{x_\mu\}$, как элемент группы F, будет обозначаться через $\bar{x}$. При гомоморфизме, который отображает F на $F/N = \tilde{G}$, элемент $\bar{x}$ переходит в элемент $\tilde{x}$. Это отображение непрерывно, поэтому (2) будет доказано, как только будет доказано соответствующее соотношение в F:

$$\lim x_\mu = \bar{x} \quad \text{в} \quad F. \tag{3}$$

Соотношение (3) означает, что $\bar{x}^{-1}x_\mu$ принадлежит $\bar{U}$ для достаточно больших μ или, согласно определению окрестности $\bar{U}$, $x_\nu^{-1}x_\mu$ принадлежит U для достаточно больших μ и ν.

Но это очевидно, потому что $\{x_\mu\}$ — фундаментальная последовательность.

Теперь мы можем доказать основную теорему:

IV. *Группа* $\tilde{G}$ *слабо полна.*

Доказательство совершенно аналогично проведенному в § 78 доказательству для случая вещественных чисел. Пусть $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots\}$ — некоторая последовательность элементов из $\tilde{G}$, удовлетворяющая условию Коши:

$$\tilde{x}_\mu^{-1}\tilde{x}_\nu \in \tilde{V} \quad \text{для} \quad \mu \geqslant m \quad \text{и} \quad \nu \geqslant m.$$

Выберем счетный базис $\{U_1, U_2, \ldots\}$ окрестностей точки e в группе G. Для каждой окрестности U_λ выберем окрестность V_λ такую, что

$$V_\lambda^{-1}V_\lambda V_\lambda \subseteq U_\lambda.$$

Мы можем, кроме того, считать, что

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots$$

Окрестности V_λ определяют окрестности $\bar{V}_\lambda$ в F, а эти в свою очередь — окрестности $\tilde{V}_\lambda$ в $\tilde{G}$. Каждый элемент $\tilde{x}_\mu$ является, согласно III, пределом некоторой последовательности элементов

из G; следовательно, для $\tilde{x}_\mu$ мы можем выбрать такой y_μ из G, что

$$\tilde{x}_\mu^{-1} y_\mu \in \tilde{V}_\mu.$$

Покажем, что элементы y_μ составляют фундаментальную последовательность. Имеем

$$y_\mu^{-1} y_\nu = (y_\mu^{-1}\tilde{x}_\mu)(\tilde{x}_\mu^{-1}\tilde{x}_\nu)(\tilde{x}_\nu^{-1} y_\nu) \in \tilde{V}_\mu^{-1}(\tilde{x}_\mu^{-1}\tilde{x}_\nu)\tilde{V}_\nu. \tag{4}$$

Для каждого λ существует такое $m \geqslant \lambda$, что

$$\tilde{x}_\mu^{-1}\tilde{x}_\nu \in \tilde{V}_\lambda \quad \text{для} \quad \mu \geqslant m, \quad \nu \geqslant m.$$

Из (4) для $\mu \geqslant m \geqslant \lambda$ и $\nu \geqslant m \geqslant \lambda$ теперь следует, что

$$y_\mu^{-1} y_\nu \in \tilde{V}_\mu^{-1}\tilde{V}_\lambda\tilde{V}_\nu \subseteq \tilde{V}_\lambda^{-1}\tilde{V}_\lambda\tilde{V}_\lambda \subseteq \tilde{U}_\lambda,$$

т. е. $y_\mu^{-1} y_\nu \in U_\lambda$. Следовательно, y_μ составляют некоторую фундаментальную последовательность в группе G. Эта последовательность определяет некоторый элемент y из $\tilde{G}$ и, согласно III, имеет своим пределом $\tilde{y}$. Элементы $\tilde{x}_\mu$ имеют тот же самый предел, потому что

$$\tilde{y}^{-1}\tilde{x}_\mu = (\tilde{y}^{-1} y_\mu)(y_\mu^{-1}\tilde{x}_\mu),$$

и для достаточно больших μ оба множителя принадлежат сколь угодно малым окрестностям точки e. Таким образом, последовательность $\{\tilde{x}_\mu\}$ имеет в $\tilde{G}$ некоторый предел и группа оказывается слабо полной.

T_1-группы, не удовлетворяющие первой аксиоме счетности A_1, при некоторых подходящих предположениях также могут быть пополнены. Для этого, следуя Бурбаки[1]), нужно как при определении понятия «полноты», так и при конструкции пополнения вместо фундаментальных последовательностей рассматривать так называемые фильтры Коши. Ниже об этом говорится более подробно.

Задача. Если группа удовлетворяет аксиомам T_1 и A_1, то каждая слабо полная подгруппа H замкнута в G. (Воспользоваться задачей 2 из § 161.)

§ 167. Фильтры

Пусть M — произвольно фиксированное множество. Подмножества из M будем обозначать буквами A, B, .. Системы этих подмножеств будут обозначаться готическими большими буквами $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, ...

Система $\mathfrak{F}$ называется *фильтром*, если она обладает следующими свойствами:

F_1. *Каждое множество A, содержащее одно из множеств из $\mathfrak{F}$, само принадлежит $\mathfrak{F}$.*

---

[1]) Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Физматгиз, 1958, гл. III.

F_2. *Пересечение любого конечного числа множеств из* $\mathfrak{F}$ *снова принадлежит* $\mathfrak{F}$.

F_3. *Пустое множество не принадлежит системе* $\mathfrak{F}$.

Из F_2 следует, что само множество M, как пересечение пустого множества подмножеств из M, принадлежит $\mathfrak{F}$. Вместо F_2 можно было бы потребовать следующее:

F_2'. *Пересечение любых двух множеств из* $\mathfrak{F}$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$.

F_2''. *Множество* M *принадлежит системе* $\mathfrak{F}$.

Пример 1. Окрестности произвольной точки p в топологическом пространстве M составляют некоторый фильтр — *фильтр окрестностей* точки p.

Непустая система $\mathfrak{B}$ называется *базисом фильтра*, если она обладает следующими свойствами:

B_1. *Пересечение любых двух множеств из* $\mathfrak{B}$ *содержит некоторое множество из* $\mathfrak{B}$.

B_2. *Пустое множество не принадлежит системе* $\mathfrak{B}$.

Если оба эти свойства налицо, то можно построить некоторый фильтр $\mathfrak{F}$, состоящий из подмножеств множества M, которые содержат по крайней мере по одному подмножеству из $\mathfrak{B}$. Говорят, что этот фильтр *порождается* базисом $\mathfrak{B}$ и что $\mathfrak{B}$ — *базис фильтра* $\mathfrak{F}$.

Пример 2. Базис окрестностей некоторой точки p в топологическом пространстве M является базисом фильтра окрестностей точки p.

Пример 3. Пусть задана некоторая последовательность элементов множества M:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Если удалить конечное число членов этой последовательности, то остальные будут составлять некоторое множество A. Множества A такой природы составляют некоторый базис фильтра $\mathfrak{B}$. Фильтр, порожденный базисом $\mathfrak{B}$, состоит из тех подмножеств множества M, которые содержат почти все члены данной последовательности.

Начиная с этого места, пусть M — некоторая топологическая группа G. Пусть V — некоторая окрестность единицы e. Говорят, что множество A является *малым порядка* V, если все частные $x^{-1}y$ элементов из A лежат в V:

$$x^{-1}y \in V, \text{ так что } y \in xV \text{ для любых } x \text{ и } y \text{ из } A.$$

Говорят, что система множеств $\mathfrak{B}$ *содержит произвольно малые множества*, если для каждой окрестности единицы V существует множество A из $\mathfrak{B}$, являющееся малым порядка V.

Фильтр Коши — это фильтр, который содержит произвольно малые множества.

Базис фильтра Коши $\mathfrak{B}$ в группе G — это такой базис фильтра,

который содержит произвольно малые множества. Фильтр, порожденный базисом фильтра Коши, является фильтром Коши.

Базис фильтра $\mathfrak{B}$ *сходится к* a, если в каждой окрестности точки a лежит некоторое множество A из $\mathfrak{B}$. В этом случае пишут

$$\lim \mathfrak{B} = a.$$

В любой T_1-группе предел a определен однозначно.

В § 166 T_1-группа была названа слабо полной, если в ней каждая последовательность Коши имеет предел. На самом деле это понятие полезно только тогда, когда группа удовлетворяет первой аксиоме счетности. В общем же случае необходимо более сильное понятие. Введем его: Т-группа G называется *сильно полной*, если в ней сходится каждый фильтр Коши.

Каждая сильно полная Т-*группа является и слабо полной.*

Доказательство. Пусть группа G сильно полна и пусть $\{x_\nu\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в G. Множества A, которые получаются при отбрасывании конечного числа членов из данной последовательности, являются произвольно малыми по определению последовательности Коши. Эти множества A составляют некоторый базис фильтра Коши $\mathfrak{B}$, который порождает некоторый фильтр Коши $\mathfrak{F}$. Последний имеет в G некоторый предел a. В каждой окрестности точки a лежат почти все члены последовательности x_ν, а потому эта последовательность имеет в G предел — точку a.

Докажем теперь, следуя Бурбаки, следующее:

Если некоторое множество D в Т-*группе G плотно и каждый базис фильтра Коши в D сходится к некоторому пределу из G, то группа G сильно полна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольный фильтр Коши в G. Мы должны доказать, что $\mathfrak{F}$ сходится.

Для каждой окрестности V единицы e и каждого множества A фильтра $\mathfrak{F}$ построим произведение множеств AV. Такие множества составляют некоторый базис фильтра $\mathfrak{B}$, потому что если AV и $A'V'$ — два таких произведения множеств, то множество

$$(A \cap A')(V \cap V')$$

содержится в пересечении AV и $A'V'$. Покажем теперь, что $\mathfrak{B}$ является базисом фильтра Коши.

Пусть U — некоторая окрестность единицы e и V — настолько малая окрестность, что $V^{-1}VV$ содержится в U. Выберем множество A малым порядка V. Для любых двух элементов av и $a'v'$ множества AV имеют место соотношения

$$(av)^{-1}a'v' = v^{-1}(a^{-1}a')v' \in V^{-1}VV \subseteq U,$$

так что AV является малым порядка U. Тем самым $\mathfrak{B}$ является базисом фильтра Коши.

Пересечения произведений AV с D никогда не являются пустыми, потому что A содержит по крайней мере один элемент a и в каждой окрестности aV элемента a имеется по крайней мере одна точка из D. Следовательно, пересечения $AV \cap D$ составляют некоторый базис фильтра Коши на D. По условию этот базис имеет некоторый предел b в G. В каждой окрестности точки b лежит некоторое множество AV, а потому и его подмножество $Ae = A$. Тем самым $\mathfrak{F}$ сходится к b, чем и заканчивается доказательство.

Задача 1. Если фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к a, то $\mathfrak{F}$ является фильтром Коши.

Задача 2. Если базис фильтра $\mathfrak{B}$ сходится к a, то порожденный базисом $\mathfrak{B}$ фильтр $\mathfrak{F}$ тоже сходится к a, и наоборот.

Задача 3. Топологическая группа, являющаяся слабо полной и удовлетворяющая первой аксиоме счетности, сильно полна.

(Указание. Пусть $V_1, V_2, \ldots$ — произвольный счетный базис окрестностей единицы e и $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши. Для каждого n существует множество A_n в этом фильтре, являющееся малым порядка V_n. Построим пересечения

$$D_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

и выберем x_n в D_n. Тогда $\{x_n\}$ — некоторая фундаментальная последовательность, предел которой является и пределом фильтра $\mathfrak{F}$.)

§ 168. Пополнение группы с помощью фильтров Коши

В порядке подготовки к изучению сильного пополнения докажем одну лемму, которая совершенно аналогична лемме из § 166 и доказывается точно так же.

Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши. Тогда для каждой окрестности U точки e существует окрестность V этой же точки и множество A из $\mathfrak{F}$ такие, что

$$x^{-1}Vx \subseteq U \quad \textit{для всех } x \textit{ из } A.$$

Доказательство. Выберем W так, чтобы было $WWW \subseteq U$. Множество A выберем так, чтобы было

$$x^{-1}y \in W \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } A.$$

Выберем какой-нибудь фиксированный элемент y в A. Тогда $x^{-1}y$ и $y^{-1}x$ принадлежат W, если x принадлежит A. В силу E_4 (§ 163) окрестность V можно выбрать в yWy^{-1}. Тогда $x^{-1}Vx \subseteq (x^{-1}y)\,W\,(y^{-1}x) \subseteq WWW \subseteq U$ для всех x из A.

Под произведением двух фильтров $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ подразумевается фильтр, порожденный произведениями AB, A из $\mathfrak{F}$, B из $\mathfrak{G}$. Произведение фильтров ассоциативно:

$$\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G}\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}. \tag{1}$$

Действительно, обе части в (1) равны фильтру, порожденному произведениями ABC, A из $\mathfrak{F}$, B из $\mathfrak{G}$, C из $\mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что:

I. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — фильтры Коши, то $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ — фильтр Коши.*

Доказательство. Имеем

$$(xy)^{-1}x'y' = y^{-1}(x^{-1}x')\,y\cdot(y^{-1}y'). \tag{2}$$

Если x и x' принадлежат подходящим образом выбранному множеству A из $\mathfrak{F}$ и точно так же y и y' принадлежат подходящим образом выбранному множеству B из $\mathfrak{G}$, то $x^{-1}x'$ и $y^{-1}y'$ лежат в произвольно малых окрестностях единицы e, а потому в силу леммы $y^{-1}(x^{-1}x')\,y$ принадлежит сколь угодно малой окрестности U; следовательно, произведение (2) лежит в как угодно малой окрестности точки e, что и требовалось доказать.

II. *Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши, а фильтр $\mathfrak{G}$ сходится к e, то фильтр $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ сходится к e.* При этом под $\mathfrak{F}^{-1}$ подразумевается фильтр, который состоит из множеств A^{-1}, A из $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть x и x' принадлежат некоторому множеству A фильтра $\mathfrak{F}$ и y принадлежит некоторому множеству B фильтра $\mathfrak{G}$, так что при подходяще выбранном B элемент y оказывается элементом произвольно малой окрестности V точки e. Имеем

$$x^{-1}yx' = x^{-1}yx\cdot x^{-1}x'. \tag{3}$$

В силу леммы множество $x^{-1}Vx$ при подходяще выбранных окрестности V и множестве A принадлежит сколь угодно малой окрестности U точки e. Следовательно, произведение (3) принадлежит $U\cdot U$, а потому содержится в сколь угодно малой окрестности точки e.

Задача 1. Множества A, содержащие единицу e, составляют некоторый фильтр Коши $\mathfrak{E}$. Он является единичным элементом относительно умножения фильтров: $\mathfrak{E}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ для всех $\mathfrak{F}$.

Как и § 166, мы должны сейчас ввести аксиому сильной пополняемости GK, являющуюся аналогом TG_3:

GK. *Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши, то и $\mathfrak{F}^{-1}$ — фильтр Коши.*

Это означает следующее: если произведения $x^{-1}y$ (x и y из $A \in \mathfrak{F}$) лежат в сколь угодно малой окрестности точки e, то и произведения yx^{-1} лежат в сколь угодно малой окрестности точки e. В случае абелевых групп это утверждение тривиально.

Фильтры Коши относительно умножения образуют некоторую *полугруппу* в том смысле, что здесь оказываются выполненными первые три аксиомы группы из § 6. В общем случае аксиома 4 не выполняется. Несмотря на то, что для каждого фильтра Коши $\mathfrak{F}$ существует фильтр Коши $\mathfrak{F}^{-1}$, произведение $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}$ в большинстве случаев не равно $\mathfrak{E}$.

Обозначим полугруппу фильтров Коши в G через $\hat{G}$. Превратим $\hat{G}$ в топологическое пространство, определив *базис окрестностей* $\hat{U}$ единичного элемента $\mathfrak{E}$, сопоставляя каждой окрестности

U единицы e из G базисную окрестность $\hat{U}$ следующим образом: $\hat{U}$ состоит из всех тех фильтров $\mathfrak{F}$, которые содержат по крайней мере одно множество $A \subseteq U$.

Определенные таким образом базисные окрестности $\hat{U}$ удовлетворяют требованиям $E_1 - E_5$ § 163. Для $E_1 - E_3$ и E_5 это утверждение тривиально, а для доказательства E_4 нужно воспользоваться леммой.

Задача 2. Доказать свойство E_4.

Задача 3. Фильтрами, сходящимися к e, являются в точности те фильтры, которые лежат во всех окрестностях $\hat{U}$.

С помощью окрестностей $\hat{U}$, так же как и в § 163, построим сдвинутые окрестности $\mathfrak{F}\hat{U}$. Тем самым $\hat{G}$ станет топологическим пространством. Взятие произведения $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ и элемента $\mathfrak{F}^{-1}$ непрерывны в смысле этой топологии; следовательно, можно рассматривать $\hat{G}$ как *топологическую полугруппу*. Аксиома отделимости T_1 в общем случае для построенного объекта не выполнена (см. задачу 3).

Фильтры, сходящиеся к e, образуют в $\hat{G}$ некоторую подполугруппу $\hat{N}$. В силу II подполугруппа $\hat{N}$ является нормальной в том смысле, что

$$\mathfrak{F}^{-1}\hat{N}\mathfrak{F} \subseteq \hat{N} \text{ для всех } \mathfrak{F}.$$

Свойства полугрупп $\hat{G}$ и $\hat{N}$ вместе с очевидным свойством

$$\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} \in \hat{N}$$

позволяют построить факторгруппу

$$\hat{G}/\hat{N} = \tilde{G}.$$

Для этого нужно лишь еще раз просмотреть конструкцию факторгруппы из § 10 и заметить, что свойство $a^{-1}a = e$ (т. е. в нашем случае $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$) как таковое вовсе не нужно: нужно лишь, чтобы $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} \in \hat{N}$. Факторгруппа является, таким образом, настоящей группой: в ней каждый элемент обладает настоящим обратным. Так же, как в § 164, усматривается, что факторгруппа $\hat{G}/\hat{N}$ является топологической. Полугруппа $\hat{G}$ отображается с помощью непрерывного гомоморфизма на $\hat{G}/\hat{N} = \tilde{G}$.

Согласно задаче 3 полугруппа $\hat{N}$ состоит в точности из тех фильтров $\mathfrak{F}$, которые не отделимы от единичного элемента $\mathfrak{E}$ группы $\tilde{G}$. Согласно § 163 полугруппа $\hat{N}$ замкнута и, следовательно, $\tilde{G} = \hat{G}/\hat{N}$ является T_1-группой.

Каждый элемент x из G определяет некоторый фильтр $\mathfrak{F}_x$, состоящий из множеств A, содержащих x.

Этот фильтр содержит множество $\{x\}$, а потому является фильтром Коши. Таким образом, каждому элементу x группы G соответствует некоторый элемент $\hat{x} = \mathfrak{F}_x$ полугруппы $\hat{G}$. Отображение $x \longmapsto \hat{x}$ является непрерывным, причем произведению соответствует произведение. Гомоморфизм $\hat{G} \to \tilde{G}$ сопоставляет элементу $\hat{x}$ некоторый образ $\tilde{x}$. Следовательно, получается цепь непрерывных гомоморфизмов

$$x \longmapsto \hat{x} \longmapsto \tilde{x}. \tag{4}$$

Если два элемента x и y неотделимы друг от друга в G, то они имеют один и тот же образ $\tilde{x}$ в $\tilde{G}$, и наоборот.

Начиная с этого места, пусть G — некоторая T_1-группа. Тогда любые два различных элемента x и y отделимы и, следовательно, отображение $x \longmapsto \tilde{x}$ взаимно однозначно. Таким образом, группа G вкладывается в $\tilde{G}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторый базис фильтра Коши в G. Так как G погружается в $\tilde{G}$, можно рассматривать $\mathfrak{B}$ и как базис фильтра в $\tilde{G}$. С другой стороны, базис $\mathfrak{B}$ порождает в G некоторый фильтр Коши $\mathfrak{F}$. При гомоморфизме $\hat{G} \to \tilde{G}$ ему соответствует некоторый элемент $\tilde{a}$ из $\tilde{G}$. Мы утверждаем теперь следующее:

III. *Базис фильтра $\mathfrak{B}$ сходится к $\tilde{a}$.*

Доказательство. В соответствии с определением базиса фильтра Коши для каждой окрестности U точки e существует некоторое множество A из $\mathfrak{B}$ такое, что

$$y^{-1}x \in U \quad \text{для всех } x \text{ и } y \text{ из } A.$$

Это можно записать и так: $A^{-1}x \subseteq U$ для всех $x \in A$.

Множество A^{-1} принадлежит фильтру $\mathfrak{F}^{-1}$, а множество $\{x\}$ — фильтру $\hat{x}$, так что произведение $\mathfrak{F}^{-1}\hat{x}$ содержит множество $A^{-1}\{x\} \subseteq \subseteq U$. Это означает, согласно определению окрестности $\hat{U}$ в $\hat{G}$, что $\mathfrak{F}^{-1}\hat{x} \in \hat{U}$ для всех $x \in A$.

Перейдем теперь с помощью непрерывного гомоморфизма из $\hat{G}$ в $\tilde{G}$; тогда получится включение $\tilde{a}^{-1}\tilde{x} \in \tilde{U}$, так что $\tilde{x} \in \tilde{a}\tilde{U}$.

Мы отождествили $\tilde{x}$ с x, а потому $\tilde{x} \in \tilde{a}U$ для всех $x \in A$, т. е. $A \subseteq \tilde{a}\tilde{U}$.

Таким образом, в базисе фильтра $\mathfrak{B}$ существуют множества A, которые содержатся в сколь угодно малых окрестностях $\tilde{a}\tilde{U}$ точки $\tilde{a}$, т. е. $\mathfrak{B}$ сходится к $\tilde{a}$. Тем самым доказано III.

Так как в каждой окрестности точки $\tilde{a}$ лежит некоторое непустое множество A, то в каждой окрестности точки $\tilde{a}$ находятся некоторые точки из G. Это означает, что

Группа G плотна в $\tilde{G}$.

Отсюда и из III в силу последней теоремы § 167 следует, что:

IV. *Группа $\tilde{G}$ является сильно полной.*

Задача 4. Если в G имеет место первая аксиома счетности, то она справедлива и в $\tilde{G}$. Каждый элемент из $\tilde{G}$ является в этом случае пределом некоторой последовательности $\{x_\nu\}$ из G, и слабое пополнение группы G в соответствии с § 166 дает то же самое, что и сильное пополнение в соответствии с § 168.

§ 169. Топологические векторные пространства

Топологический модуль (или Т-*модуль*) M — это аддитивная абелева Т-группа. Согласно § 163 топология на M определяется некоторой системой окрестностей нуля, удовлетворяющей условиям 1, 2, 3 (§ 163, конец).

Понятия из §§ 166 и 168 переносятся на аддитивные Т-группы с помощью соответствующего изменения символики. Последовательность $\{x_\nu\}$ называется *фундаментальной*, если разности $x_\mu - x_\nu$ для достаточно больших μ и ν принадлежат каждой окрестности V нуля. Множество A называется *малым порядка* V, если разности $y-x$ ($x \in A$, $y \in A$) все принадлежат V. Фильтр, содержащий произвольно малые множества, называется *фильтром Коши*. Модуль M называется *сильно полным* или просто *полным*, если в нем сходится каждый фильтр Коши.

Так как для коммутативных групп, в соответствии с § 168, не нужна аксиома полноты, каждый T_1-модуль M погружается в некоторый полный T_1-модуль $\tilde{M}$.

Пусть для M задана *область операторов* Ω, обладающая следующим свойством:

$$\gamma(a+b) = \gamma a + \gamma b \tag{1}$$

для каждого оператора γ. Предположим, что γx — непрерывная функция от x. Для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности U существовала окрестность V со свойством

$$\gamma V \subseteq U.$$

Если фильтр $\mathfrak{F}$ содержит произвольно малые множества A, то и $\gamma\mathfrak{F}$ содержит произвольно малые множества γA, т. е. $\gamma\mathfrak{F}$ — снова фильтр Коши. Поэтому теория пополнений из § 168 без изменений переносится на T_1-модули с операторами; пополнение $\tilde{M}$ имеет в качестве области операторов снова область Ω.

Иногда оказывается целесообразным писать $a\gamma$ вместо γa. В этом случае Ω называют *областью правых операторов*, а M — *правым Ω-модулем*.

Вместо (1) в этом случае имеет место равенство

$$(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma. \tag{2}$$

Если Ω — кольцо, то, кроме (2), требуется, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$a(\beta+\gamma)=a\beta+a\gamma, \tag{3}$$

$$a(\beta\gamma)=(a\beta)\gamma. \tag{4}$$

При переходе к пополнению $\tilde{M}$ и эти свойства остаются верными.

Если Ω — некоторое Т-кольцо, то предполагается, что произведение $x\gamma$ является непрерывной функцией от x и γ. Это свойство тоже переносится на $\tilde{M}$, так что $\tilde{M}$ — полный правый Ω-модуль.

Если Ω — некоторое тело и если, кроме уже указанных правил, имеет место

$$a\cdot 1=a, \tag{5}$$

где 1 — единичный элемент тела Ω, то M называется *векторным пространством над* Ω. Если Ω — топологическое тело, то требуется еще и непрерывность $x\gamma$ как функции от x и γ.

Простой пример топологического векторного пространства над топологическим полем Ω дает *каноническое n-мерное векторное пространство* Ω^n, которое определяется как совокупность всех упорядоченных наборов из n элементов поля Ω: $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Умножение векторов на элементы из Ω задается равенством

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n)\gamma=(\beta_1\gamma, \ldots, \beta_n\gamma).$$

Произвольная базисная окрестность U' нулевого вектора состоит из всех векторов, все координаты $\beta_1, \ldots, \beta_n$ которых принадлежат некоторой базисной окрестности U нуля в Ω. Аксиомы об окрестностях и непрерывности сложения и умножения оказываются в этом случае выполненными.

Если поле Ω полно, то и Ω^n — полное пространство.

Доказательство. Множество A векторов $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является малым порядка U' тогда и только тогда, когда множество элементов β_i для каждого i является малым порядка U. Назовем множество элементов β_i i-компонентой множества A и обозначим ее через A_i. Если теперь задан некоторый фильтр Коши $\mathfrak{F}$ множеств A, то A_i для каждого i образуют некоторый фильтр Коши в Ω Если поле Ω полно, то все эти фильтры Коши имеют некоторые пределы γ_i в Ω. Но тогда в $\mathfrak{F}$ для каждого U существует множество $A^{(1)}$, 1-компонента которого лежит в γ_1+U; точно так же существует множество $A^{(2)}$, 2-компонента которого лежит в γ_2+U, и т. д. вплоть до $A^{(n)}$. Пересечение $A=A^{(1)}\cap A^{(2)}\cap\ldots\cap A^{(n)}$ принадлежит тогда множеству $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)+U'$. Следовательно, фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к пределу $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.

§ 170. Пополнение колец

T_1-кольцо R является аддитивной T_1-группой и поэтому может быть расширено до сильно полной группы

$$\tilde{R} = \hat{R}/\hat{N}.$$

При этом $\hat{R}$ является аддитивной полугруппой фильтров Коши, а $\hat{N}$ — нормальной подполугруппой, которая состоит из фильтров с нулевым пределом.

Мы определим в $\hat{R}$ умножение, которое превратит $\hat{R}$ в «полукольцо», а $\hat{N}$ — в двусторонний идеал этого «полукольца», так что $\tilde{R} = \hat{R}/\hat{N}$ окажется полным топологическим кольцом.

Окрестности нуля по-прежнему будут обозначаться буквами U, V, W, ... Сначала будет доказана

Лемма. *Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши, то для каждой окрестности U существует такая окрестность W и такое множество A в $\mathfrak{F}$, что*

$$AW \subseteq U \quad \text{и} \quad WA \subseteq U.$$

Доказательство. Существует такая окрестность U', что $U' + U' \subseteq U$. Существует, далее, такая окрестность V, что $VV \subseteq U'$. Наконец, существует такое множество A из $\mathfrak{F}$, что

$$x - y \in V \quad \text{для всех} \quad x \text{ и } y \text{ в } A.$$

Зафиксируем в A элемент y. Существует такая окрестность $W \subseteq V$, что

$$yW \subseteq U' \quad \text{и} \quad Wy \subseteq U'.$$

Но тогда для каждого x из A и каждого z из W

$$xz = (x - y)z + yz \in VV + yW \subseteq U' + U' \subseteq U,$$

так что $AW \subseteq U$. Точно так же доказывается, что $WA \subseteq U$.

Из этой леммы следует, что

I. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — фильтры Коши, то и $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ — фильтр Коши.*

Доказательство. Имеем

$$xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y'. \tag{1}$$

Для заданной окрестности U определим V так, чтобы было

$$V + V \subseteq U.$$

Согласно лемме существуют такое множество A в $\mathfrak{F}$, такое множество B в $\mathfrak{G}$ и такая окрестность W, что

$$WB \subseteq V \quad \text{и} \quad AW \subseteq V.$$

Можно считать, что A и B — малые множества порядка W.

Если теперь xy и $x'y'$ — два произвольных элемента из AB (x и x' — из A, y и y' — из B), то из (1) следует соотношение

$$xy - x'y' \in V + V \subseteq U.$$

Таким образом, $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ — фильтр Коши.

II. *Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши и $\mathfrak{G}$ — фильтр, сходящийся к нулю, то $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ сходятся к нулю.*

Доказательство непосредственно следует из леммы.

Согласно I фильтры Коши образуют некоторое полукольцо $\hat{R}$. Согласно II фильтры, сходящиеся к нулю, образуют двусторонний идеал $\hat{N}$ в этом полукольце. Модуль классов вычетов

$$\tilde{R} = \hat{R}/\hat{N}$$

является, следовательно, полным топологическим модулем и кольцом.

Докажем теперь непрерывность умножения в $\hat{R}$:

III. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — фильтры Коши и $\hat{U}$ — некоторая (определенная, как в § 168) базисная окрестность нуля в $\hat{R}$, то существуют базисные окрестности нуля $\hat{V}$ и $\hat{W}$ такие, что*

$$(\mathfrak{F} + \hat{V})(\mathfrak{G} + \hat{W}) \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{G} + \hat{U}. \tag{2}$$

Доказательство. Для произвольных x, y, v, w из R имеет место соотношение

$$(x + v)(y + w) = xy + xw + vy + vw. \tag{3}$$

Пусть теперь дана произвольная окрестность U нуля в R. Определим U' так, что $U' + U' + U' \subseteq U$, а затем, в соответствии с леммой, множество A в $\mathfrak{F}$, множество B в $\mathfrak{G}$ и окрестности V' и W' так, что $AW' \subseteq U'$ и $V'B \subseteq U'$, и, наконец, окрестности $V \subseteq V'$ и $W \subseteq W'$ так, что $VW \subseteq U'$. Тогда из (3) следует, что для $x \in A$, $y \in B$, $v \in V$ и $w \in W$ имеет место

$$(x + v)(y + w) \in xy + U' + U' + U' \subseteq xy + U,$$

так что

$$(A + V)(B + W) \subseteq AB + U.$$

Тем самым доказано III.

Итак, $\hat{R}$ является Т-кольцом. Следовательно, и $\tilde{R}$ — топологическое кольцо и, так как выполнена первая аксиома отделимости T_1, оно будет T_1-кольцом.

Согласно § 168 кольцо $\tilde{R}$ полное. Итак:

Каждое T_1-кольцо погружается в полное T_1-кольцо.

§ 171. Пополнение тел

Пусть S — некоторое топологическое тело, которое удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Согласно § 170 S погружается в некоторое полное Т-кольцо $\tilde{S}=\hat{S}/\hat{N}$. Но кольцо $\tilde{S}$ не обязано быть топологическим телом, потому что для некоторого элемента $w\neq 0$ из $\tilde{S}$ может не существовать обратного, а если он и существует, то не обязан зависеть непрерывно от w.

Для того чтобы S погружалось в полное Т-тело, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая аксиома пополняемости тел:

SK. *Если $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши в S, не сходящийся к нулю, то $\mathfrak{F}^{-1}$ — базис фильтра Коши.*

Сначала докажем, что аксиома SK обязательно выполняется, если S вкладывается в некоторое полное топологическое тело S^*. Действительно, произвольный фильтр Коши $\mathfrak{F}$ в S при вложении дает некоторый базис фильтра, который в S^* имеет ненулевой предел a. Тогда базис фильтра $\mathfrak{F}^{-1}$ сходится к a^{-1}, так как отображение $x\longmapsto x^{-1}$ непрерывно; следовательно, $\mathfrak{F}^{-1}$ — базис фильтра Коши.

Пусть теперь выполнена аксиома SK. Мы покажем, что S вкладывается в полное топологическое тело.

Прежде всего мы покажем, что прежняя аксиома TS (§ 165) следует из SK.

Пусть U — произвольная окрестность нуля в S. Мы должны показать, что существует окрестность V такая, что

$$(1+V)^{-1}\subseteq 1+U.$$

Окрестность $1+V$ единицы составляет некоторый фильтр Коши $\mathfrak{F}$, который сходится к единице, а потому не сходится к нулю. Согласно SK, множество $\mathfrak{F}^{-1}=\mathfrak{B}$ является базисом фильтра Коши. Множествами в $\mathfrak{B}$ служат

$$A=(1+V)^{-1},$$

где, разумеется, из $1+V$ исключен нуль. Для каждого $y\neq 0$ из $1+V$ имеет место соотношение

$$1-y^{-1}=y^{-1}(y-1)\in AV. \tag{1}$$

Согласно лемме из § 170 для каждой окрестности U существует такая окрестность W и такое множество A' из $\mathfrak{B}$, что

$$A'W\subseteq -U.$$

Это множество A' имеет вид $(1+V')^{-1}$. Выберем теперь V

в пересечении $V' \cap W$. Тогда $A \subseteq A'$, $V \subseteq W$ и, следовательно,

$$AV \subseteq A'W \subseteq -U,$$
$$1 - y^{-1} \in -U,$$
$$y^{-1} - 1 \in U,$$
$$y^{-1} \in 1 + U.$$

Это справедливо в отношении всех $y \neq 0$ из $1 + V$; поэтому

$$(1 + V)^{-1} \subseteq 1 + U, \tag{2}$$

что и утверждалось.

Теперь мы можем показать, что каждый элемент $a \neq 0$ из $\tilde{S}$ обладает обратным. Элемент a является пределом некоторого фильтра Коши $\mathfrak{F}$ из S. Согласно SK множество $\mathfrak{F}^{-1}$ является базисом фильтра Коши, который, следовательно, обладает в $\tilde{S}$ некоторым пределом b. Произведение $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}$ имеет, с одной стороны, предел ba, а с другой — предел 1, поэтому $ba = 1$.

Чтобы показать, что $\tilde{S}$ является телом, мы должны, в соответствии с § 165, показать, что для каждой базисной окрестности $\tilde{U}$ нуля существует базисная окрестность $\tilde{V}$ нуля такая, что

$$(1 + \tilde{V})^{-1} \subseteq 1 + \tilde{U}.$$

Базисные окрестности $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ при гомоморфизме $\hat{S} \to \tilde{S}$ получаются из некоторых базисных окрестностей $\hat{U}$ и $\hat{V}$ из $\hat{S}$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$(1 + \hat{V})^{-1} \subseteq 1 + \hat{U}.$$

Но это немедленно следует из (2), если вспомнить о том, как получаются $\hat{U}$ и $\hat{V}$ из U и V.

Подытожим:

Если имеет место аксиома SK, *то* $\tilde{S}$ *является* T-*телом. Для того чтобы тело* S *погружалось в некоторое полное* T-*тело, необходимо и достаточно, чтобы имела место аксиома* SK.

По поводу дальнейших сведений о топологических телах см. следующие работы:

Капланский (Kaplansky I.). Topological methods in valuation theory. — Duke Math. J., 1947, **14**, p. 527.

Ковальский, Дюрбаум (Kowalsky H. J., Dürbaum H.). Arithmetische Kennzeichung von Körpertopologien. — J. reine und angew. Math., 1953, **191**, S. 135.

Ковальский (Kowalsky H. J.). Zur topologischen Kennzeichung von Körpern. — Math. Nachr., 1953, **9**, S. 261.

Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.