

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Современная алгебра, берущая свое начало в замечательных работах Гильберта конца прошлого века, сложилась в общих чертах в 20-е годы. Итогом этого периода становления явилось первое издание настоящей книги, вышедшее в 1931 году. Хотя с тех пор передний край алгебраических исследований продвинулся далеко, книга и сейчас выглядит свежо и современно, — правда, уже не как свод новейших результатов и понятий, а как отличный учебник основ алгебры. Эволюция книги от издания к изданию хорошо отражена в предисловиях автора.

Сознание того, что предметом алгебры являются множества с заданными на них алгебраическими операциями, а точнее — сами операции, утвердилось полвека назад, однако систематическому изучению долгое время подвергались лишь немногие типы таких множеств, унаследованные от алгебры XIX века, — группы, кольца, векторные пространства. Этим классическим системам и посвящена в основном книга ван дер Вардена.

Дальнейший прогресс в алгебре наметился в середине 30-х годов, когда Биркгоф начал изучение произвольных универсальных алгебр, а А. И. Мальцев заложил основы еще более общей теории, пограничной с математической логикой, — теории алгебраических систем. Развитие этой теории было вызвано глубокими внутренними причинами и настоятельными запросами приложений, в которых все чаще возникали алгебраические системы, не сводящиеся к классическим. Указанные более поздние исследования¹⁾ остались за рамками книги.

Новосибирск, Академгородок.

10 марта 1975 г.

Ю. И. Мерзляков

¹⁾ См. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ АВТОРА

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА¹⁾

Во втором издании была существенно расширена теория нормирований. В последнее время она становится все более важной для теории чисел и алгебраической геометрии. Поэтому здесь я изложил главу «Теория нормирований» гораздо подробнее и яснее.

Отвечая многочисленным пожеланиям, я вновь включил разделы о полном порядке и трансфинитной индукции, опущенные во втором издании, и на этой основе изложил во всей общности разработанную Штейницем теорию полей.

Благодаря совету Зарисского понятие многочлена удалось ввести легко и ясно. Кроме того, благодаря любезному замечанию Переманса улучшено изложение теории норм и следов.

Ларен (Северная Голландия), июль 1950.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

Недавно скончавшийся алгебраист и теоретико-числовик Бранд закончил рецензию третьего издания этой книги в годовом отчете немецкого математического общества (том 55) следующими словами:

«Что касается названия²⁾, то я бы приветствовал выбор для четвертого издания более простого, но и более сильного заго-

¹⁾ В переводе два тома немецкого оригинала объединены в один. Перевод выполнен с 8-го издания первого тома (главы 1—11) и 5-го издания второго тома (главы 12—20). — Прим. ред.

²⁾ В первых изданиях книга называлась «Современная алгебра». — Прим. ред

ловка — «Алгебра». Книга, которая так много дала, дает и будет давать лучшей части математики, не должна своим названием вызывать подозрение, будто бы она посвящена одному какому-то современному течению, которое еще не было известно вчера, а завтра, возможно, будет забыто».

Следуя этому совету, я изменил заголовок книги на «Алгебра».

Указанию М. Дойринга я обязан более целенаправленным определением понятия «гиперкомплексная система» и расширением теории Галуа полей деления круга настолько, насколько этого требует ее приложение к теории циклических полей.

На основании писем из различных стран внесены многочисленные мелкие исправления. Благодарю авторов этих писем.

Цюрих, март 1955.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

Первое издание задумывалось как введение в новую абстрактную алгебру; разделы классической алгебры, в частности, теория определителей, предполагались известными. Но сегодня эта книга используется студентами в основном как первое введение в алгебру. Поэтому оказалось необходимым ввести главу «Векторные и тензорные пространства», в которой подробно обсуждаются основные понятия линейной алгебры и, в частности, понятие определителя.

Первая глава «Числа и множества» была облегчена тем, что понятие порядка и полного порядка были перенесены в новую девятую главу. Лемма Цорна выводится непосредственно из аксиомы выбора. Тем же методом (по Х. Кнезеру) проводится доказательство теоремы о полном упорядочении.

В разделе о теории Галуа были использованы некоторые идеи из известной книги Артина. Пробел в одном доказательстве в теории циклических полей, на который мне многие указывали, ликвидирован в § 61. В § 67 доказывается существование нормального базиса.

Первый том теперь заканчивается главой «Вещественные поля». Теория нормирований должна быть представлена во втором томе.

Цюрих, февраль 1966.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ ПЕРВОГО ТОМА

В предлагаемом издании исправлено несколько опечаток, на которые я обратил внимание благодаря любезным письмам. Все прочее осталось неизменным.

Цюрих, апрель 1971.

Б. Л. ван дер Варден

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ ВТОРОГО ТОМА

В начало второго тома вошли две новые главы: первая — об алгебраических функциях одной переменной, охватывающая материал вплоть до теоремы Римана — Роха для полей с произвольным полем констант; другая — о топологической алгебре, посвященная в основном пополнению топологических групп, колец и тел. Я благодарю за многочисленные полезные замечания профессора Г. Р. Фишера, прочитавшего эти две главы в рукописи.

Глава «Общая теория идеалов» расширена путем введения важных теорем Крулля о символических степенях простых идеалов и о цепях простых идеалов. Сильнее выявлена связь между теорией идеалов алгебраически замкнутых колец и теорией нормирований. В главу «Линейная алгебра» введен раздел об антисимметрических билинейных формах.

В главе «Алгебры» увеличено число примеров, развита теория радикала по Джекобсону без условия конечности и сделано большее ударение на основополагающих идеях Эмми Нётер о прямых суммах и пересечениях модулей. Благодаря сочетанию методов Джекобсона и Эмми Нётер удалось значительно упростить доказательства основных теорем.

С помощью различных сокращений я пытался сделать объем книги более приемлемым. По этой причине выпала глава «Теория исключения».

Теорема о существовании системы результантов для однородных уравнений, которая доказывалась раньше с помощью теории исключения, теперь появляется лишь в § 121 как следствие теоремы Гильберта о корнях.

Цюрих, июнь 1959.

Б. Л. ван дер Варден

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ ВТОРОГО ТОМА

Професор П. Рокетт был настолько любезен, что предоставил в мое распоряжение чудесное доказательство теоремы о вычетах для алгебраических дифференциалов *udz*. Благодаря этому глава об алгебраических функциях смогла приобрести вызывающую удовлетворение завершенность.

В «Топологической алгебре» вводятся пополнения групп, колец и тел по Бурбаки с помощью фильтра, независимо от второй аксиомы счетности. Конец главы сокращен.

Важная для многочисленных приложений глава «Линейная алгебра» помещена в начало тома, а глава «Топологическая алгебра» — в конец.

Теперь второй том состоит из трех независимых кусков, в каждом из которых три главы:

главы 12—14: линейная алгебра, алгебры, теория представлений;

главы 15—17: теория идеалов;

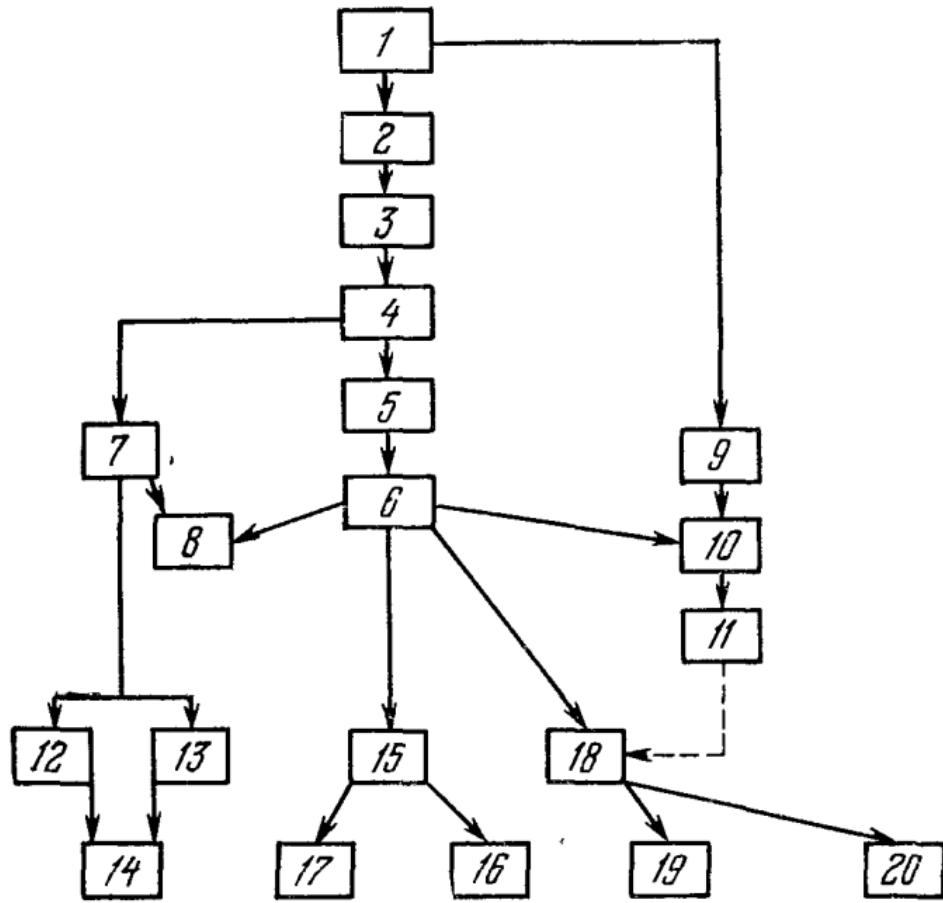
главы 18—20: нормированные поля, алгебраические функции, топологическая алгебра.

Это подразделение отражено в более точной, чем раньше, схеме зависимости глав.

Цюрих, март 1967.

Б. Л. ван дер Варден

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ



ВВЕДЕНИЕ

Цель книги. «Абстрактное», «формальное» или «аксиоматическое» направление, которому алгебра обязана своим новым подъемом, привело к новым понятиям и результатам в теории групп, теории полей, теории нормирований, теории идеалов и теории алгебр и позволило по-новому взглянуть на внутренние связи в этой области. Главная цель книги — ввести читателя в мир всех этих понятий.

Но если общие понятия и методы выдвигаются на первый план, то в рамках новых построений должны найти место и отдельные результаты, относящиеся к классическому состоянию алгебры.

Распределение материала. Указания читателю. Чтобы достаточно ясно представить общие точки зрения, господствующие в «абстрактной» алгебре, оказалось необходимым изложить с самого начала основы теории групп и элементарной алгебры.

В последнее время появилось множество хороших изложений теории групп, классической алгебры и теории полей, что сделало возможным преподнести эту вводную часть кратко, но без пробелов. Подробное изложение начинающий читатель найдет во многих книгах¹⁾.

Следующим основным принципом служит требование, согласно которому каждая отдельная часть должна быть, по возможности, понятной сама по себе. Тому, кто хочет познакомиться с общей теорией идеалов или теорией алгебр, не нужно предварительно изучать теорию Галуа, а тот, кто хочет справиться о чем-либо в линейной алгебре, не должен пугаться сложных построений теории идеалов.

По этой причине разбиение на главы осуществлено так, что первые три главы, занимая небольшое место, содержат необходимое в качестве подготовительного материала для всех последующих глав. Основные понятия таковы: 1) множества; 2) группы; 3) кольца,

1) По теории групп укажем книгу: Шпайзер (Speiser A.). *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. — 2. Aufl. — Berlin, 1927. По теории полей: Хассе (Hasse H.) *Höhere Algebra* (I, II) und *Aufgabensammlung zur höheren Algebra*. — Sammlung Göschen. 1926/27; Хаупт (Hauppt O.). *Einführung in die Algebra* I, II. — Leipzig, 1929. По классической алгебре: Перрон (Perron O.). *Algebra* I, II. — 1927. По линейной алгебре: Диксон (Dickson L. E.). *Modern algebraic theories*. — Chicago, 1926.

идеалы и поля. Дальнейшие главы первого тома посвящены главным образом теории полей и опираются в первую очередь на основополагающую работу Штейница (Steinitz) из Crelle's Journal (1910), 137. Во втором томе изложены, по возможности независимо друг от друга, разделы из теории модулей, колец и идеалов с приложениями к алгебраическим функциям, элементарным делителям, алгебрам и представлениям групп.

За пределами рассмотрений оказалось необходимым оставить теорию абелевых интегралов и непрерывных групп, потому что для полноценного изложения они требуют выходящих за рамки нашего курса понятий и методов; то же относится к основанной на них теории инвариантов.

Дальнейшая информация о строении книги содержится в оглавлении и приведенной выше схеме зависимости глав, из которой совершенно точно усматривается, сколько предшествующих глав необходимо для каждой конкретной главы.

Появляющиеся по ходу изложения задачи подобраны в основном так, чтобы можно было проверить, оказался ли понятым предшествующий текст. Они, кроме того, содержат примеры и дополнения, которые используются в дальнейшем. Задачи, требующие искусства для своего решения, как правило, не используются в последующем и формулируются в квадратных скобках.

Источники. Эта книга возникла отчасти из записей лекций, а именно были использованы:

курс лекций Э. Артина по алгебре (Гамбург, летний семестр 1926 года);

семинар по теории идеалов, руководимый Э. Артином, В. Бляшке, О. Шрайером и автором (Гамбург, зимний семестр 1926/27);

два курса Э. Нётер по теории групп и алгебр (Гётtingен, зимний семестр 1924/25, зимний семестр 1927/28)¹⁾.

Многие новые доказательства и варианты доказательств, встречающиеся в этой книге, даже там, где нет явных ссылок, имеют своим источником упомянутые лекции и семинар.

¹⁾ В обработке Э. Нётер эти лекции появились в Math. Zeitschrift, 1929, 30, S. 641—692.