

Часть I

ПРОЛОГ

Поток времени в своем неудержимом и вечном течении влечет за собой все сущее. Он ввергает в пучину забвения как незначительные события, так и великие, достойные памяти; туманное как говорится в трагедии, он делает явным, а очевидное скрывает. Однако историческое повествование служит надежной защитой от потока времени и как бы сдерживает его неудержимое течение; оно вбирает в себя то, о чем сохранилась память, и не дает этому погибнуть в глубинах забвения.

Анна Комнина, Алексиада

Глава 1

ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Физику нельзя представить себе как логически стройную систему. Скорее, в любой момент она увязывает как-то огромное число неупорядоченных идей, часть из которых пришла к нам, подобно эпосу, из героических периодов прошлого, а другая возникла, подобно утопическим романам, из наших смутных предчувствий всеобъемлющего синтеза в будущем. Автор книги по физике может навести порядок в этом хаосе, организуя свой материал любым из двух способов: либо беспристрастно прослеживая всю его историю, либо следуя своим собственным идеям о том, что такая завершенная логическая структура физических законов. Оба способа приемлемы, важно только, используя первый, не перепутать физику с историей, а историю с физикой.

В этой книге я изложил теорию гравитации, согласно собственным представлениям о внутренней логике этой ветви физической науки, а не в последовательности ее исторического развития. Общеизвестен тот исторический факт, что, когда Альберт Эйнштейн работал над общей теорией относительности, у него под рукой имелся законченный математический аппарат римановой геометрии, который он и использовал целиком. Тем не менее

этот исторический факт вовсе не означает, что суть общей теории относительности состоит именно в применении римановой геометрии к пространству и времени.

С моей точки зрения, наиболее полезно рассматривать общую теорию относительности прежде всего как теорию гравитации, чья связь с геометрией возникает из-за особых эмпирических свойств гравитации — свойств, которые были сконцентрированы в принципе эквивалентности гравитации и инерции Эйнштейна. В связи с этим повсюду в этой книге я пытался отложить введение таких геометрических понятий, как метрика, аффинная связность и кривизна, до тех пор, пока использование этих понятий не будет продиктовано физической необходимостью. Поэтому порядок глав здесь весьма слабо связан с ходом исторического развития.

Однако, поскольку мы не должны позволить истории физики «погибнуть в глубинах забвения», мы посвящаем эту первую главу краткой ретроспективе трех основных разделов физической науки, предшествовавших общей теории относительности, — неевклидовой геометрии, ньютоновой теории тяготения и принципу относительности. Историю этих разделов физики можно проследить вплоть до 1916 г., когда все они были собраны воедино Эйнштейном в его общей теории относительности [1].

§ 1. История создания неевклидовой геометрии

Евклид в «Элементах»¹⁾ показал, как с помощью нескольких определений, аксиом и постулатов можно было бы построить геометрию. Его предположения в основном относятся к самым фундаментальным свойствам точек, линий и фигур, и школьникам XX в. они кажутся столь же очевидными, как и греческим математикам III в. до н. э. Однако одно из утверждений Евклида всегда казалось менее очевидным, чем другие. Пятый постулат Евклида гласит: «Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых»²⁾.

В течение двух тысяч лет геометры пытались освободить евклидову систему постулатов от этого последнего, доказывая, что он является логическим следствием остальных. Сегодня мы знаем, что это невозможно. Евклид был прав: нельзя обнаружить противоречия в геометрии без пятого постулата, а потому, если он

¹⁾ Основное английское издание [2] с введением и комментариями Т. Хитса.

²⁾ «Начала Евклида», перевод с греческого Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1—3, М.—Л., 1948—1950.—Прим. перев.

нам нужен, его необходимо ввести с самого начала, а не пытаться доказывать в конце. Тем не менее борьба за *доказательство* пятого постулата привела в конечном итоге к одному из величайших достижений в истории математики — созданию неевклидовой геометрии.

Список тех, кто надеялся доказать пятый постулат как теорему, включает Птолемея (умер в 168 г.), Прокла (418—485), Насирэддина Туси (XIII в.), Леви бен Герзона (1288—1344), П. А. Катальди (1548—1626), Джованни Альфонсо Борелли (1608—1679), Витали Джордано (1633—1711), Джона Валлиса (1616—1703), Джироламо Саккери (1667—1733), Иоганна Генриха Ламберта (1728—1777) и Адриена Мари Лежандра (1752—1833). Все они, без исключения, преуспели лишь в замене пятого постулата каким-либо другим более или менее эквивалентным постулатом, который, однако, не удавалось вывести из других постулатов Евклида. Так, последователь Платона Прокл из Афин предложил следующую замену пятого постулата: «Если прямая пересекает одну из двух параллельных, она пересекает и другую» (т. е. если определить параллельные как нигде не пересекающиеся прямые, то существует не более одной прямой, проходящей через любую заданную точку и параллельной данным). Джон Валлис, профессор Оксфорда, показал, что пятый постулат Евклида можно заменить следующим эквивалентным утверждением: «Для любой заданной фигуры существует фигура, подобная ей, причем любого размера». Лежандру удалось доказать эквивалентность пятого постулата такому утверждению: «Существует треугольник, в котором сумма трех углов равна двум прямым»¹⁾.

В XVIII в. попытки обойти пятый постулат Евклида приняли другое направление. В 1733 г. иезуит Джироламо Саккери опубликовал детальное изучение вопроса, какой могла бы быть геометрия, если бы пятый постулат оказался ложным. В частности, он рассмотрел следствия своей «гипотезы об острых углах» — утверждения, что «для любой заданной прямой можно провести прямую, перпендикулярную к ней, и прямую, пересекающую ее под острым углом, которые не пересекали бы одна другую»¹⁾. В действительности Саккери не считал это возможным; он был убежден в необходимости пятого постулата и исследовал неевклидову геометрию только в надежде отыскать в итоге логическое противоречие. Аналогичные попытки исследования неевклидовой геометрии были начаты Ламбертом и Лежандром.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), кажется, был первым, у кого хватило смелости принять логическую возможность суще-

¹⁾ Цитируется по работе [3].

ствования неевклидовой геометрии¹⁾). Его постепенное прозрение увековечено в цикле писем (см. [4]) к Бойяи, Олберсу, Шумахеру, Герлингу, Тауринусу и Бесселю, написанных за период с 1799 по 1844 г. В письме, датированном 1824 г., он просил Тауринуса хранить молчание о «высказанном им еретическом мнении». Гаусс обращался даже к триангуляционной съемке в горах Гарца, производя съемку треугольника, образуемого вершинами Инзельберг, Брокен и Высокий Хаген, чтобы увидеть, будет ли сумма его внутренних углов равна 180° (так и оказалось). Затем в 1832 г. он получил письмо от своего друга Вольфганга Бойяи, в котором была описана неевклидова геометрия, развитая его сыном, Яношем Бойяи (1802–1860), офицером австрийской армии. Впоследствии Гаусс узнал, что профессор из Казани Николай Иванович Лобачевский (1793–1856) получил аналогичные результаты в 1826 г.

Гаусс, Бойяи и Лобачевский независимо друг от друга открыли то, что сейчас называется *двумерным пространством постоянной отрицательной кривизны*. Пространства такого вида весьма интересны; позже, в главе, посвященной космографии, мы увидим, что пространство, в котором мы обитаем, возможно, является трехмерным пространством с постоянной кривизной. Однако для создателей новой геометрии было важным то, что она описывает бесконечное двумерное пространство, для которого справедливы все предположения Евклида — за исключением пятого постулата! Существует только одно такое пространство, и этим, возможно, объясняется, почему открытие новой геометрии было сделано более или менее независимо в Германии, Австрии и России. (Поверхность сферы также удовлетворяет геометрии Евклида без пятого постулата, но, поскольку такая поверхность конечна, на ней нет места параллельным линиям.)

В гл. 13, посвященной симметричным пространствам, мы увидим, что двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны нельзя представить как поверхность в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Это объясняет, почему потребовались два тысячелетия, чтобы найти его. По этой же причине становятся неверными альтернативные почти очевидные версии пятого постулата Евклида, выдвигавшиеся Проклом, Валлисом и Лежандром, так как теперь через любую заданную точку можно провести бесконечное множество прямых, параллельных

¹⁾ У Гаусса не хватило смелости опубликовать свои заметки о пятом постулате. Это было сделано великим русским математиком Николаем Лобачевским, который и получил весь запас злой критики не понявших его математиков. Роль Яноши Бойяи столь же велика, однако он не довел развитие аппарата неевклидовой геометрии до той полноты и совершенства, какую последний получил в работах Лобачевского. — Прим. ред.

данной прямой, никакие фигуры различного размера не могут быть подобными и, наконец, сумма углов *любого треугольника* меньше 180° . Однако все еще оставалась открытой возможность того, что пятый постулат Евклида вытекает из других постулатов, так как, вообще говоря, не было очевидным, что геометрия Гаусса, Бойяи и Лобачевского не содержит логических противоречий. Обычный способ «доказательства» того, что система математических постулатов самосогласована, сводится к конструированию модели, удовлетворяющей этим же постулатам, но сделано это должно быть из объектов и понятий, взятых из другой системы, непротиворечивость которой (на данный момент) не вызывает сомнений. Как для евклидовой, так и для неевклидовой геометрии в качестве «модели» служит теория действительных чисел. Если декартовы координаты точки на плоскости отождествить с парой действительных чисел (x_1, x_2) , а расстояние между двумя точками (x_1, x_2) и (X_1, X_2) записать в виде $[(x_1 - X_1)^2 + (x_2 - X_2)^2]^{1/2}$, то все евклидовы постулаты можно доказать как теоремы о действительных числах. В 1870 г. аналитическая геометрия такого типа [5] была построена Феликсом Клейном (1849—1925) для пространства Гаусса, Бойяи, Лобачевского¹⁾. Точка в такой геометрии задается парой действительных чисел x_1 и x_2 , удовлетворяющих условию

$$x_1^2 + x_2^2 < 1, \quad (1.1.1)$$

а расстояние $d(x, X)$ между двумя точками равно

$$\operatorname{ch} \left[\frac{d(x, X)}{a} \right] = \frac{1 - x_1 X_1 - x_2 X_2}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} (1 - X_1^2 - X_2^2)^{1/2}}, \quad (1.1.2)$$

где a — фундаментальная длина, устанавливающая масштаб в данной геометрии. Отметим, что такое пространство является бесконечным, так как $d(x, X) \rightarrow \infty$ при $(X_1^2 + X_2^2) \rightarrow 1$. При таком определении «точки» и «расстояния» модель, очевидно, удовлетворяет всем постулатам Евклида, кроме пятого, и действительно подчиняется геометрии Гаусса, Бойяи и Лобачевского.

Итак, прошли два тысячелетия, прежде чем была установлена логическая независимость пятого постулата Евклида.

С этого и началось развитие неевклидовой геометрии. Мы видели, что для открытия геометрии Гаусса, Бойяи, Лобачевского необходимо было оставить идею о том, что кривую поверхность можно изучить, только вложив ее в обычное трехмерное пространство. Но как же тогда описывать и классифицировать кривые пространства? Чтобы разобраться в этом вопросе, нужно вернуться к 1827 г., когда Гаусс опубликовал свои «Общие изыскания о кривых поверхностях». Гаусс впервые устанавливает

¹⁾ Модель Евклида для геометрии Гаусса — Бойяи — Лобачевского была дана в книге [6].

См. сб. «Об основаниях геометрии» 2 изд. Казань 1895. — Ред.

различие между внутренними свойствами поверхности, т. е. геометрией, которую могли бы исследовать маленькие плоские жуки, живущие на этой поверхности, и *внешними* ее свойствами, проявляющимися при вложении этой поверхности в пространство большего числа измерений. Он осознает, что *внутренние* свойства поверхностей «в высшей степени заслуживают самого пристального изучения геометрами».

Гаусс понял также, что существенным внутренним свойством любой поверхности является ее метрическая функция $d(x, X)$, задающая расстояние между точками x и X по кратчайшему пути между ними на рассматриваемой поверхности. Например, конус или цилиндр имеют те же локальные внутренние свойства, что и плоскость, потому что последнюю можно свернуть в конус или цилиндр без растяжений и разрезов, т. е. не искажая метрических соотношений. Все картографы знают, что сферу нельзя развернуть в плоскость без искажений, т. е. локальные внутренние свойства сферы и плоскости различны.

Существует простой пример, к которому обращались Эйнштейн, Уилер и др., чтобы проиллюстрировать, как исследование метрики поверхности позволяет изучить ее внутренние свойства (фиг. 1.1). Рассмотрим N точек на плоскости. Одну из них примем за начало координат. Ось x проведем из начала координат через другую заданную точку, тогда расстояния между различными точками будут задаваться с помощью $(2N - 3)$ координат, а именно x -координаты второй точки и x - и y -координат остальных $(N - 2)$ точек. Существует $N(N - 1)/2$ различных расстояний между N -точками, и для достаточно больших N их можно связать M различными алгебраическими соотношениями, где

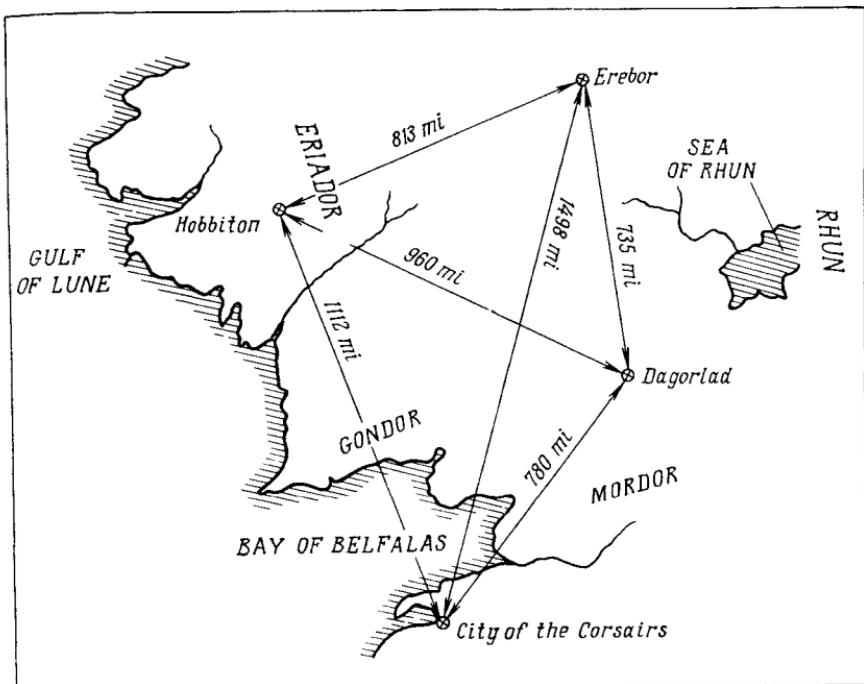
$$M = \frac{N(N-1)}{2} - (2N-3) = \frac{(N-2)(N-3)}{2}. \quad (1.1.3)$$

В простейшем нетривиальном случае $N = 4$ легко показать, что расстояния d_{mn} между m -й и n -й точками связаны соотношением

$$\begin{aligned} 0 = & d_{12}^4 d_{34}^2 + d_{13}^4 d_{24}^2 + d_{14}^4 d_{23}^2 + d_{23}^4 d_{14}^2 + d_{24}^4 d_{13}^2 + d_{34}^4 d_{12}^2 + d_{12}^2 d_{23}^2 d_{34}^2 + \\ & + d_{12}^2 d_{24}^2 d_{41}^2 + d_{13}^2 d_{34}^2 d_{41}^2 + d_{23}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 - d_{12}^2 d_{23}^2 d_{34}^2 - d_{13}^2 d_{32}^2 d_{24}^2 - d_{12}^2 d_{24}^2 d_{43}^2 - \\ & - d_{14}^2 d_{42}^2 d_{23}^2 - d_{13}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 - d_{14}^2 d_{43}^2 d_{32}^2 - d_{23}^2 d_{31}^2 d_{14}^2 - d_{21}^2 d_{13}^2 d_{24}^2 - d_{24}^2 d_{41}^2 d_{13}^2 - \\ & - d_{21}^2 d_{14}^2 d_{43}^2 - d_{31}^2 d_{12}^2 d_{24}^2 - d_{32}^2 d_{21}^2 d_{14}^2. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Это соотношение удовлетворяется на любом односвязном участке поверхности цилиндра или конуса, так как эти фигуры обладают теми же внутренними свойствами, что и плоскость.

Однако уже протяженности авиационных маршрутов между любыми четырьмя городами не будут удовлетворять соотношению (1.1.4), так как поверхность Земли имеет иные внутренние свойства. Длины авиамаршрутов связаны другим соотношением,



Фиг. 1.1. Карта Средней Земли¹⁾. Является ли Средняя Земля плоской?

соответствующим сферической поверхности. С помощью этого соотношения можно также определить радиус Земли, хотя это не самый удобный метод и не им пользовался Эратосфен. Существенно, однако, то, что кривизна поверхности Земли может быть определена из локальных внутренних свойств этой поверхности.

Обладая богатым воображением, можно представить себе множество метрических функций $d(x, X)$. Гаусс внес значительный вклад в выделение одного частного класса метрических пространств, достаточно широкого, чтобы включать в себя пространство Гаусса, Бойяи, Лобачевского и обычные кривые поверхности, но достаточно узкого, чтобы иметь право называться геометрией. Он предположил, что в любой достаточно малой области пространства можно ввести локальную евклидову систему координат (ξ_1, ξ_2) , такую, что расстояние между двумя точками с координатами (ξ_1, ξ_2) и $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ удовлетворяет теореме Пифагора

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2. \quad (1.1.5)$$

¹ Из трилогии Толкина «Повелитель колец». — Прим. ред.

Такую локальную евклидову систему координат можно задать, например, в любой точке гладкой кривой поверхности, используя декартовы координаты на плоскости, касающейся рассматриваемой поверхности в данной точке. Однако рассуждение Гаусса ни в коей мере не связано с внешними свойствами поверхности, оно относится только к внутренним метрическим свойствам бесконечно малой окрестности выбранной точки.

Если поверхность неевклидова, то ни в какой *конечной* ее части нельзя ввести евклидову систему координат (ξ_1, ξ_2) и, следовательно, нельзя удовлетворить теореме Пифагора. Допустим, что все же имеется некая система координат (x_1, x_2) , покрывающая кривое пространство. Возникает вопрос: какую форму принимает в такой системе координат предположение Гаусса? Легко вычислить, что расстояние ds между точками (x_1, x_2) и $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ будет задаваться следующим образом:

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) \times \\ \times dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2, \quad (1.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2, \\ g_{12} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right), \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Такая форма ds^2 — признак *метрического пространства*. [В гл. 3 мы увидим, что справедливо и обратное утверждение: в произвольной точке любого пространства с ds , определяемым (1.1.6), можно выбрать локальные евклидовы координаты ξ_1, ξ_2 , удовлетворяющие (1.1.5).] Для сферы радиуса a можно использовать полярные координаты θ, ϕ ; тогда метрика определяется следующим образом:

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta. \quad (1.1.8)$$

Сомножитель $\sin^2 \theta$ в $g_{\phi\phi}$ как раз и придает сфере внутренние свойства, отличные от тех, которые имеет плоскость. В геометрии Гаусса, Бойля и Лобачевского можно использовать координаты x_1, x_2 модели Клейна и с помощью приведенной выше формулы для $d(x, X)$ показать, что

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{a^2(1-x_2^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}, & g_{12} &= \frac{a^2 x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}, \\ g_{22} &= \frac{a^2(1-x_1^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Длину любого пути можно определить, интегрируя ds вдоль всего пути.

Метрические функции g_{ij} определяют все внутренние свойства метрического пространства, но сами при этом зависят от выбора координатной сетки. Если, например, для описания плоскости использовать полярные координаты r, θ , то метрические функции будут иметь вид

$$g_{rr} = 1, \quad g_{r\theta} = 0, \quad g_{\theta\theta} = r^2. \quad (1.1.10)$$

Хотя эти формулы и не выглядят формулами евклидова пространства, они описывают евклидово пространство, что можно формально показать, переходя к декартовым координатам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. В более общем случае переход от координат (x_1, x_2) к координатам (x'_1, x'_2) будет переводить метрические функции g_{ij} в новые функции g'_{ij} , где, например,

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x'_1} \right)^2 = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 = g_{11} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 + \\ &+ 2g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + g_{22} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Что же можно сказать о внутренних свойствах пространства, рассматривая его метрические коэффициенты? Очевидно, необходима некоторая функция от g_{ij} и его производных, которая зависела бы только от внутренних свойств пространства и не зависела, как зависит g_{ij} , от выбора конкретной системы координат.

Гаусс нашел такую функцию и показал ее единственность; это — так называемая кривизна Гаусса

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2) &= \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right] - \\ &- \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \right. \\ &\left. + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] - \\ &- \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

где g — детерминант

$$g(x_1, x_2) \equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

(Пусть читатель не теряет присутствия духа от ужасного вида этой формулы. В гл. 6, вводя более мощный математический

аппарат, мы сможем извлечь и обсудить понятие кривизны в более компактных и изящных обозначениях.) Применяя формулу (1.1.12) к метрическим функциям (1.1.8) и (1.1.9), находим, что сфера есть пространство с постоянной положительной кривизной

$$K = \frac{1}{a^2} \text{ (сфера)}, \quad (1.1.13)$$

а пространство Гаусса, Бойяи и Лобачевского имеет постоянную отрицательную кривизну

$$K = -\frac{1}{a^2} \text{ (ГБЛ).} \quad (1.1.14)$$

(Кстати, в понятии «отрицательная кривизна» нет ничего экзотического; обычное седло имеет отрицательную кривизну. Однако то, что кривизна K постоянна, не дает возможности реализовать геометрию Гаусса, Бойяи, Лобачевского на обычных искривленных поверхностях. Очевидно также, что только при постоянной K можно удовлетворить другим постулатам Евклида, поскольку эти постулаты описывают истинно однородное пространство. Если же K при переходе от точки к точке меняется, то и внутренние свойства пространства изменяются вместе с ней.) И наконец, применив формулу для K к метрике (1.1.10), описывающей плоскость в полярных координатах, получим, как и следовало ожидать,

$$K = 0 \text{ (плоскость).} \quad (1.1.15)$$

Таким образом, даже допуская произвол при выборе системы координат, мы можем выявить внутренние свойства пространства, вычисляя непосредственно величину K .

После того как это было выяснено, математики довольно скоро занялись проблемой описания внутренних свойств кривых пространств, имеющих три или более измерений. Однако обобщение работы Гаусса на более чем два измерения оказалось нетривиальным делом, поскольку внутренние свойства таких пространств нельзя описать единственной функцией кривизны K .

В пространстве D -измерений имеется $D(D+1)/2$ независимых метрических функций g_{ij} ; так как мы вольны в выборе D координат, остается

$$C = \frac{D(D+1)}{2} - D = \frac{D(D-1)}{2}$$

функций, которые и определяют внутренние свойства пространства. При $D = 2$ $C = 1$, что и было получено Гауссом. При $D > 2$, $C > 1$, и геометрия усложняется. Эта проблема была полностью решена Георгом Фридрихом Бернхардом Риманом (1826—1866), изложившим в 1854 г. то, что мы сейчас называем римановой геометрией, в своей лекции при торжественном вступлении

в должность в Геттингене «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»¹⁾). Последующие работы Кристоффеля, Риччи, Леви-Чивита, Бельтрами и других развили идеи Римана и превратили их в прекрасную математическую конструкцию, описанную в терминах тензорного анализа и кривизны в главах этой книги. Но только Эйнштейну удалось понять, каким образом можно использовать в физике неевклидову геометрию.

§ 2. История создания теории тяготения

Исаак Ньютон (1642—1727), заканчивая свои «Начала», назвал гравитацию причиной того, что взаимодействие Солнца и планет осуществляется «пропорционально количеству твердой материи, содержащейся в них, и распространяется во все стороны на бесконечное расстояние, а сила взаимодействия убывает всегда обратно пропорционально квадрату расстояния» [7]. Закон Ньютона состоит из двух частей, которые были открыты различными путями и каждая из которых сыграла свою роль в развитии механики от Ньютона до Эйнштейна.

Начнем, естественно, с открытия Галилео Галилея (1564—1642), который обнаружил, что скорость свободного падения тел не зависит от их массы. Его инструментами были наклонная плоскость, служившая для замедления падения тел, водяные часы для измерения времени и маятник для исключения трения качения. Эти опыты позже были улучшены Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Таким образом, Ньютон мог применить свой второй закон и прийти к выводу, что сила, вызванная гравитацией, пропорциональна массе тела, на которое она действует. Третий закон утверждает, что сила пропорциональна также и массе тела, являющегося источником силы.

Ньютон вполне сознавал, что эти выводы справедливы, вероятно, только приближенно и что «инертная масса», входящая во второй закон, может и не быть в точности такой же, как «гравитационная масса», содержащаяся в законе гравитации. Если бы так оказалось, то второй закон Ньютона нужно было бы записать в виде

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \quad (1.2.1)$$

а закон гравитации в виде

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \quad (1.2.2)$$

где \mathbf{g} есть поле, зависящее от координат и от масс других тел. В любой заданной точке ускорение тогда задавалось бы следующим

¹⁾ См. Риман Б., Соч., М.—Л., 1948.—Прим. перев.