в должность в Геттингене «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [1]). Последующие работы Кристоффеля, Риччи, Леви-Чивита, Бельтрами и других развили идеи Римана и превратили их в прекрасную математическую конструкцию, описанную в терминах тензорного анализа и кривизны в главах этой книги. Но только Эйнштейну удалось понять, каким образом можно использовать в физике неевклидову геометрию.

§ 2. История создания теории тяготения

Исаак Ньютон (1642—1727), заканчивая свои «Начала», назвал гравитацию причиной того, что взаимодействие Солнца и планет осуществляется «пропорционально количеству твердой материи, содержащейся в них, и распространяется во все стороны на бесконечное расстояние, а сила взаимодействия убывает всегда обратно пропорционально квадрату расстояния» [7]. Закон Ньютона состоит из двух частей, которые были открыты различными путями и каждая из которых сыграла свою роль в развитии механики от Ньютона до Эйнштейна.

Начнем, естественно, с открытия Галилео Галилея (1564—1642), который обнаружил, что скорость свободного падения тел не зависит от их массы. Его инструментами были наклонная плоскость, служившая для замедления падения тел, водяные часы для измерения времени и маятник для исключения трения качения. Эти опыты позже были улучшены Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Таким образом, Ньютон мог применить свой второй закон и прийти к выводу, что сила, вызванная гравитацией, пропорциональна массе тела, на которое она действует. Третий закон утверждает, что сила пропорциональна также и массе тела, являющегося источником силы.

Ньютон вполне сознавал, что эти выводы справедливы, вероятно, только приближенно и что «инертная масса», входящая во второй закон, может и не быть в точности такой же, как «гравитационная масса», содержащаяся в законе гравитации. Если бы так оказалось, то второй закон Ньютона нужно было бы записать в виде

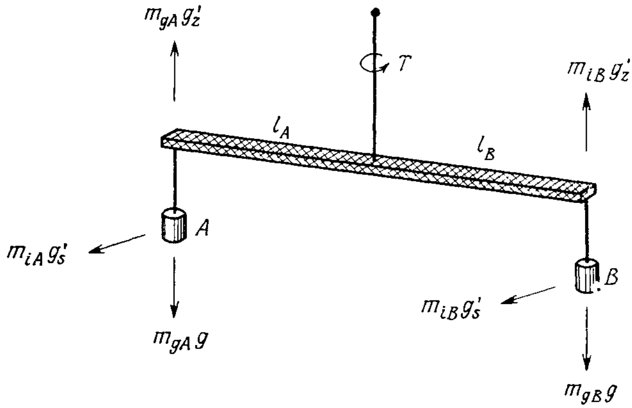
$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}, \tag{1.2.1}$$

а закон гравитации в виде

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \tag{1.2.2}$$

где $\mathbf{g}$ есть поле, зависящее от координат и от масс других тел. В любой заданной точке ускорение тогда задавалось бы следующим

[1]) См. *Риман Б.*, Соч., М.—Л., 1948.— *Прим. перев.*



Фиг. 1.2. Схема эксперимента Этвеша.

образом:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\mathbf{g}. \tag{1.2.3}$$

Следовательно, тела, имеющие разные значения отношения m_g/m_i, обладали бы и различными ускорениями a; в частности, периоды колебаний маятников равной длины были бы пропорциональны величине $(m_i/m_g)^{1/2}$. В опыте с маятниками равной длины, но сделанными из различных материалов Ньютон проверил это и не обнаружил разницы между их периодами. Позже, в 1830 г., этот результат был подтвержден в более точном эксперименте Фридриха Вильгельма Бесселя (1784—1846). Затем в 1889 г. Роланд фон Этвеш [8, 9], используя другой метод, успешно продемонстрировал, что величина отношения m_g/m_i двух разных веществ отличается не более чем на 10^{-9} (фиг. 1.2). Этвеш укрепил два груза A и B на концах стержня длиной 40 см, подвешенного на тонкой нити, привязанной к его центру. В равновесии стержень несколько наклонялся так, что выполнялось следующее условие:

$$l_A(m_{gA}g - m_{iA}g'_z) = l_B(m_{gB}g - m_{iB}g'_z), \tag{1.2.4}$$

где g — ускорение в гравитационном поле Земли, g'_z — вертикальная компонента центростремительного ускорения, связанного с вращением Земли, а l_A и l_B — эффективные длины плеч для обоих грузов. [Конечно, Этвеш выбрал веса грузов и длины плеч почти равными, но особенностью метода было то, что, если даже груз A несколько превышал B, стержень наклонялся еще как раз так, чтобы выполнялось условие (1.2.4).] Центростремительное ускорение, связанное с вращением Земли, имеет на географической широте Будапешта также и заметную горизонтальную компоненту g'_s, создающую относительно вертикальной оси крутящий момент, равный

$$T = l_A m_{iA} g'_s - l_B m_{iB} g'_s.$$

Используя для определения l_B условие равновесия, имеем

$$T = l_A m_{iA} g'_s \left[1 - \left(\frac{m_{gA}}{m_{iA}} g - g'_z\right) \left(\frac{m_{gB}}{m_{iB}} g - g'_z\right)^{-1}\right],$$

или, так как $g'_z \ll g$, получаем

$$T = l_A g'_s m_{gA} \left[\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}}\right].$$

Если бы отношения масс m_i/m_g грузов были различными, возникало бы закручивание нити, на которой подвешивался стержень. Поскольку закручивания нити обнаружить не удалось, Этвеш сделал вывод, что, например, для дерева и платины значения m_i/m_g отличаются меньше чем на 10^{-9}.

Равенство гравитационной и инертной масс произвело на Эйнштейна глубокое впечатление [10] и, как мы увидим в дальнейшем, натолкнуло его непосредственно на формулировку принципа эквивалентности. (Это равенство накладывает также очень жесткие ограничения на любые возможные негравитационные силы. Например, электростатические силы любого нового типа, в которых нуклонное число выполняло бы роль заряда, должны быть намного меньше гравитационных сил [11].) Недавно в Принстоне группа, руководимая Р. Дикке [12, 13], улучшила метод Этвеша, используя для создания крутящего момента гравитационное поле Солнца и центростремительное ускорение Земли, направленное к Солнцу, т. е. связанное не с суточным, а с орбитальным ее вращением. Преимущество этого метода состояло в том, что угол между направлением на Солнце и линией равновесия плеча изменялся с периодом 24 ч и поэтому Дикке мог выделить результаты эксперимента на фоне, не имеющем суточной частоты. В результате эксперимента он пришел к выводу, что образцы из алюминия и золота при падении на Солнце будут иметь одно и то же ускорение; различие в ускорениях может составлять самое большее 10^{-11} [1]). Было также показано (правда, с намного меньшей точностью), что нейтроны падают с тем же ускорением, что и обычное вещество [14], и что гравитационная сила взаимодействия электронов в меди та же, что и у свободных электронов [15].

Перейдем теперь ко второй части ньютоновского закона гравитации, в которой утверждается, что сила гравитационного

---

[1]) Еще более точные измерения (ошибка $< 10^{-12}$) были проведены группой В. Брагинского [ЖЭТФ, 61, 873 (1971)]; см. также книгу: Брагинский В. Б., Манукин А. Б., Измерение малых сил в физических экспериментах, М., 1974.— *Прим. ред.*

взаимодействия убывает как обратный квадрат расстояния. Эта идея не принадлежит целиком Ньютону. Иоанн Скотт Эригена (800—877 гг.) уже догадывался о том, что тяжесть и легкость тел убывают с удалением от Земли. Впоследствии эту теорию возродил Аделяр из Бата (XII в.), который считал, что если камень уронить в очень глубокий колодец, то он долетит только до центра Земли, но не дальше. (Кстати, именно Аделяр перевел Евклида с арабского на латынь, сделав тем самым его доступным средневековой Европе.) Первое исследование «закона обратных квадратов» было предпринято около 1640 г. Исмаилом Булиалдусом (1605—1694). Однако завершено это исследование было только Ньютоном, который в 1665 (или в 1666 г.) впервые вывел «закон обратных квадратов» из наблюдений. Он знал, что Луна удалена на расстояние 60 земных радиусов от центра Земли и что за каждую секунду она проходит по направлению к Земле расстояние 0,0045 фута. Следовательно, если гравитационные силы подчиняются закону обратных квадратов, то яблоко в Ланкашире, находящееся на расстоянии одного *земного* радиуса от центра Земли, должно проходить за первую секунду свободного падения расстояние в 3600 раз большее, чем 0,0045 фута, т. е. около 16 футов, что находится в хорошем согласии с измерениями. Однако Ньютон не публиковал результатов своих вычислений в течение 20 лет, поскольку не знал, как оправдать использованное им допущение, что вся масса Земли локализована в ее центре. Тем временем нескольким членам Королевского общества, включая Эдмунда Галлея (1656—1742), Кристофера Врена (1632—1723) и Роберта Гука (1635—1703), стало понятно, что при круговых орбитах планет из третьего закона Кеплера следует закон обратных квадратов. В самом деле, если квадраты периодов r^2/v^2 пропорциональны кубам радиусов r^3, то центростремительное ускорение v^2/r пропорционально $1/r^2$. Однако в действительности планеты движутся по эллипсам, а не по окружностям, и, как вычислить их центростремительные ускорения, никто не знал. Побуждаемый Галлеем, Ньютон в 1684 г. доказал, что планеты, движущиеся согласно закону обратных квадратов, действительно удовлетворяют всем эмпирическим законам Иоганна Кеплера (1571—1630): планеты движутся по эллипсам (в фокусе которых находится Солнце), выметая равные площади за равные промежутки времени, а квадраты периодов их вращения пропорциональны кубам главных осей. Таким образом, только в 1685 г. Ньютон смог завершить свои расчеты движения Луны, начатые в 1665 г. Эти огромной важности законченные исследования были опубликованы 5 июля 1686 г. под названием «Математические начала натуральной философии» [7].

В течение последующих столетий закон гравитации Ньютона дал блестящее объяснение целому ряду особенностей движения

Луны и других планет. Однако оставалось необъясненным некоторое возмущение орбиты Урана до тех пор, пока в 1846 г. Джон К. Адамс (1819—1892) в Англии и Урбен Ж. Ж. Леверье (1811—1877) во Франции независимо друг от друга не использовали этот факт для предсказания существования планеты Нептун и не вычислили ее положение. Экспериментальное обнаружение Нептуна вскоре после этого стало наиболее блестящим подтверждением теории Ньютона. Правда, движение Луны и кометы Энке (а позже и кометы Галлея) указали на отклонение от ньютоновской теории, но было ясно, что за это могли быть ответственны уже не гравитационные силы.

Одна проблема все же оставалась. За год до предсказания Нептуна Леверье подсчитал, что наблюдаемое смещение перигелия Меркурия, равное 35″, больше, чем то, которого следовало ожидать, исходя из ньютоновской теории и известных возмущающих полей, создаваемых движением других планет. Расхождение данных было подтверждено в 1882 г. Саймоном Ньюкомом (1835—1909), указавшим [16], что дополнительное смещение перигелия Меркурия за столетие составляет 43″. Леверье думал, что этот избыток, возможно, обусловлен группой малых планет между Меркурием и Солнцем. Однако после тщательных поисков в этом промежутке не было обнаружено ни одной планеты. Тогда Ньюком высказал предположение о том, что рассеянное вещество, ответственное за слабый «зодиакальный свет», видимый в плоскости эклиптики Солнечной системы, может вызывать также и дополнительное смещение перигелия Меркурия. Однако его вычисления показали, что то количество вещества, которое необходимо для объяснения прецессии перигелия Меркурия, если это вещество разместить в плоскости эклиптики, должно было бы приводить к вращению плоскостей орбит (т. е. к прецессии узлов), отличному от того, что наблюдается как у Меркурия, так и у Венеры). По этой причине Ньюком был вынужден к 1895 г. «признать эти исследования неудовлетворительными и принять временно гипотезу о том, что солнечная гравитация не в точности удовлетворяет закону обратных квадратов» [17].

К сожалению, это не стало последним словом. В 1896 г. Зелигер построил тщательно продуманную модель зодиакального света, в которой предполагаемое вещество размещалось на эллипсоидах, проходящих близко к Солнцу, что могло бы объяснить избыток смещения перигелия Меркурия без всяких противоречий между теорией и экспериментом, относящимся к вращению плоскостей орбит внутренних планет. Сейчас-то мы знаем, что эта модель совершенно неверна и что межпланетного вещества не хватает для объяснения наблюдаемого смещения перигелия Меркурия.

Однако гипотеза Зелигера вместе с успехами теории Ньютона в объяснении других явлений убедила к 1911 г. Ньюкома в том, что нет необходимости менять закон гравитации [17].

Не известно, сильно ли повлияла на Эйнштейна в процессе создания общей теории относительности проблема смещения перигелия Меркурия. Несомненно одно, что первым подтверждением этой теории было точное предсказание избыточного смещения перигелия в 43″ за столетие.

§ 3. История открытия принципа относительности

Механика Ньютона выделила семейство систем отсчета, так называемые *инерциальные системы*, в которых законы природы принимают форму, описанную в «Началах». Например, уравнения системы гравитационно-взаимодействующих точечных частиц записываются в виде

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = G \sum_M \frac{m_N m_M (\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N|^3}, \tag{1.3.1}$$

где m_N — масса N-й частицы, $\mathbf{x}_N$ — ее декартов вектор положения в момент времени t. Достаточно просто проверить тот факт, что эти уравнения сохраняют свой вид при записи в новых пространственно-временных координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}, \\ t' &= t + \tau, \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{d}$ и τ — любые действительные постоянные, а R — произвольная действительная ортогональная матрица. (Если наблюдатели O и O' используют штрихованную и нештрихованную системы координат, то O' видит координатную систему O повернутой с помощью R, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ и смещенной при $t = 0$ на величину $\mathbf{d}$, и к тому же часы у наблюдателя O отстают от часов у O' на величину τ.) Преобразование (1.3.2) образует 10-параметрическую группу (три угла Эйлера в R, по три компоненты векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{d}$ и время τ), называемую теперь *группой Галилея*. Инвариантность законов движения относительно таких преобразований называют галилеевой инвариантностью, или *принципом относительности Галилея*.

Что действительно удивляло Ньютона, так это то, что существует великое множество других преобразований, относительно которых уравнения движения неинвариантны. Например, уравнения (1.3.1) не сохраняют свою форму, если перейти к ускоряющейся, замедляющейся или, наконец, вращающейся координатным системам, т. е. если допустить, что $\mathbf{v}$ и R зависят от t. Уравнения движения сохраняют свою обычную форму только в огра-