...Существуют четыре измерения, из которых три мы называем пространственными, а четвертое — временны́м. Правда, существует тенденция противопоставить три первых измерения последнему, но только потому, что наше сознание от начала нашей жизни и до ее конца движется рывками лишь в одном-единственном направлении этого последнего измерения.
— Это,— произнес Очень Молодой Человек, делая отчаянные усилия раскурить от лампы свою сигару,— это ... право, яснее ясного.

Г. Уэллс, Машина времени

Глава 2

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В этой главе мы дадим обзор специальной теории относительности Эйнштейна. Хотя глава и представляет самостоятельный интерес, она содержит только краткое изложение результатов и основная цель ее — ввести обозначения и выписать некоторые формулы, полезные в дальнейшем. Читателю, которому необходимо более обширное введение в специальную теорию относительности, можно посоветовать прежде всего обратиться к монографиям, перечисленным в конце главы, а затем вернуться к чтению этой главы. Читателю, чувствующему себя свободно в этих вопросах, можно порекомендовать перейти непосредственно к главе 3.

§ 1. Преобразования Лоренца

Принцип специальной теории относительности гласит, что законы природы инвариантны относительно особой группы пространственно-временных преобразований координат, называемых преобразованиями Лоренца. В конце первой главы мы показали, что законы движения Ньютона инвариантны относительно галилеевых преобразований координат (1.3.2), а уравнения Максвелла не инвариантны относительно этих преобразований. Эйнштейн разрешил это противоречие, заменив галилееву инвариантность лоренц-инвариантностью. Я не стану продолжать обсуждения этой проблемы в историческом аспекте, а просто дам определение преобразований Лоренца, показав затем, как лоренц-инвариантность помогает исследовать законы природы.

Преобразования Лоренца есть переход от одной системы пространственно-временных координат x^α в другую систему x'^α.

Переход выполняется согласно правилу

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \tag{2.1.1}$$

где a^{α} и $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ — константы, ограниченные условиями

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\delta}, \tag{2.1.2}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \alpha = \beta = 1, 2, 3, \\ -1, & \alpha = \beta = 0, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

В наших обозначениях α, β, γ, ... пробегают значения 1, 2, 3, 0; x^1, x^2, x^3 — декартовы компоненты положительного вектора $\mathbf{x}$, а x^0 есть время t. Мы будем использовать естественную систему единиц, в которой скорость света равна единице, так что все компоненты x^{α} имеют размерность длины. Если не оговорено иное, то по любому индексу, появляющемуся дважды (один раз как нижний, другой раз как верхний), подобно β в уравнении (2.1.1), производится суммирование. Таким образом, (2.1.1) есть сокращенная запись следующего выражения:

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{0} x^0 + \Lambda^{\alpha}{}_{1} x^1 + \Lambda^{\alpha}{}_{2} x^2 + \Lambda^{\alpha}{}_{3} x^3 + a^{\alpha}.$$

Фундаментальным свойством, отличающим преобразование Лоренца, является то, что оно оставляет инвариантным «собственное время», определяемое так:

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - d\mathbf{x}^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \tag{2.1.4}$$

В новой системе координат x'^{α} дифференциалы координат задаются в виде

$$dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\, dx^{\gamma},$$

а потому новое координатное время записывается следующим образом:

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx'^{\alpha}\, dx'^{\beta} = -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} \Lambda^{\beta}{}_{\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta} = -\eta_{\gamma\delta}\, dx^{\gamma}\, dx^{\delta},$$

и, следовательно,

$$d\tau'^2 = d\tau^2. \tag{2.1.5}$$

Именно это свойство преобразований Лоренца объясняет то, что Майкельсон и Морли обнаружили неизменность скорости света во всех инерциальных системах. Фронт световой волны имеет скорость $|d\mathbf{x}/dt|$, равную скорости света, которая в выбранной естественной системе равна единице; следовательно, распространение света описывается формулой

$$d\tau = 0. \tag{2.1.6}$$

При преобразовании Лоренца величина $d\tau$ не меняется, т. е. $d\tau'^2 = 0$, и, следовательно, $|d\mathbf{x}'/dt'| = 1$, т. е. скорость света и в новой системе равна единице.

Можно также показать, что преобразования Лоренца (2.1.1) являются *единственными* несингулярными преобразованиями $x \to x'$, которые оставляют инвариантным $d\tau^2$ (несингулярность преобразования означает, что $x'(x)$ и $x(x')$ являются хорошими дифференцируемыми функциями и что матрица $\partial x'^\alpha/\partial x^\beta$ имеет хорошо определенную обратную матрицу $\partial x^\beta/\partial x'^\alpha$). Произвольные преобразования координат $x \to x'$, приводящие к замене $d\tau \to d\tau'$, задаются в виде

$$d\tau'^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, dx'^\alpha\, dx'^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} dx^\gamma\, dx^\delta.$$

Если для всех dx^γ это выражение равно $d\tau^2$, должно выполняться условие

$$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}. \tag{2.1.7}$$

Дифференцируя (2.1.7) по x^ε, имеем

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma\, \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\delta\, \partial x^\varepsilon} = 0.$$

Для того чтобы вычислить вторые производные, прибавим к этому выражению такое же уравнение с переставленными индексами γ и ε и вычтем уравнение с переставленными индексами ε и δ. В результате получим

$$\eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma\, \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\delta\, \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon\, \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\delta\, \partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma\, \partial x^\delta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\varepsilon\, \partial x^\delta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \right] = 0.$$

Поскольку $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$, последний и предпоследний члены сокращаются со вторым и четвертым соответственно, а первый и третий оказываются равными. Тогда остается

$$2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma\, \partial x^\varepsilon} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} = 0.$$

Но как $\eta_{\alpha\beta}$, так и $\partial x'^\beta/\partial x^\delta$ являются несингулярными матрицами. Поэтому получаем

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\gamma\, \partial x^\varepsilon} = 0. \tag{2.1.8}$$

Общее решение уравнения (2.1.8) есть как раз линейная функция (2.1.1), и, подставляя (2.1.1) в (2.1.7), мы убеждаемся в том, что $\Lambda^\alpha{}_\beta$ должно удовлетворять условию (2.1.2). Это доказательство является элементарным примером того сорта соображений относительно симметричных пространств, которые мы изложим в главе 13. (Отметим попутно следствия из следующего предположения. Если преобразования $x \to x'$ оставляют $d\tau$ инвариантным только при $d\tau = 0$, т. е. для частицы, движущейся со скоростью света, то мы обнаружим, что эти преобразования являются в общем нелинейными и образуют 15-параметрическую группу, называемую конформной. Эта группа содержит преобразования Лоренца в качестве подгруппы. Но утверждение о том, что свободная частица движется с постоянной скоростью, не являлось бы инвариантным утверждением, если скорость частицы не равнялась бы скорости света. Зная, однако, о том, что в природе существуют массивные частицы, мы должны отвергнуть конформную симметрию как возможный принцип инвариантности природы.)

Сейчас принято называть весь набор преобразований Лоренца, записанных в форме (2.1.1), *неоднородной группой Лоренца* или *группой Пуанкаре*. Подгруппа, в которой все $a^\alpha = 0$, называется *однородной группой Лоренца*. Как однородная, так и неоднородная группы Лоренца имеют подгруппы, определяемые с помощью следующих дополнительных условий, налагаемых на Λ^α_β:

$$\Lambda^0{}_0 \geqslant 1, \qquad \operatorname{Det} \Lambda = +1. \tag{2.1.9}$$

Эти подгруппы называются соответственно *собственной* однородной и собственной неоднородной группами Лоренца.

Отметим, что из (2.1.2) следует

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i{}_0)^2 \geqslant 1 \tag{2.1.10}$$

$$(\operatorname{Det} \Lambda)^2 = 1. \tag{2.1.11}$$

[Выражение (2.1.10) вытекает из (2.1.2), если положить в нем $\gamma = \delta = 0$. Формулу (2.1.11) можно получить, если записать (2.1.2) как матричное уравнение $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ и взять его детерминант.] Из (2.1.9) — (2.1.11) следует, что любая матрица Λ^α_β, которая непрерывным изменением параметров может быть превращена в тождественную матрицу δ^α_β, реализует собственное преобразование Лоренца. Действительно, никаким непрерывным изменением параметров нельзя перейти от $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$ к $\Lambda^0{}_0 \geqslant \pm 1$, или, что то же самое, от $\operatorname{Det} \Lambda = -1$ к $\operatorname{Det} \Lambda = +1$, а тождественное преобразование имеет $\Lambda^0{}_0 = +1$ и $\operatorname{Det} \Lambda = +1$. *Несобственные* преобразования Лоренца включают в себя инверсию пространства, обращение времени, либо их произведение. Как известно, инверсия пространства ($\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$) не является точной симметрией природы [1—4]; что же касается обращения времени ($\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 \leqslant -1$), то весьма сомнительно, чтобы природа была строго симметрична относительно этого преобразования [5]. Если не оговорено иное, то мы почти всегда будем иметь дело с собственными преобразованиями Лоренца, т. е. с теми, которые удовлетворяют условиям (2.1.9). Далее, собственные однородные преобразования Лоренца имеют подгруппу вращений, для которой выполняются условия

$$\Lambda^i{}_j = R_{ij}, \qquad \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0, \qquad \Lambda^0{}_0 = 1.$$

Здесь R_{ij} — унимодулярная ортогональная матрица ($\mathrm{Det}\,R = 1$ и $R^TR = 1$), а индексы i, j пробегают значения 1, 2, 3. Что касается вращений и пространственно-временных трансляций $x^\alpha \to x^\alpha + a^\alpha$, то между группой Лоренца и группой Галилея, обсужденной в первой главе, нет никаких различий. Различие содержится только в бустах[1]), т. е. в тех преобразованиях, которые изменяют скорость системы координат. Пусть один наблюдатель O видит частицу в покое, а по отношению к другому наблюдателю O' она движется со скоростью $\mathbf{v}$. Из (2.1.1) следует

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, dx^\beta \tag{2.1.12}$$

или, поскольку $d\mathbf{x} = 0$, имеем

$$dx'^i = \Lambda^i{}_0\, dt \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2.1.13}$$

$$dt' = \Lambda^0{}_0\, dt. \tag{2.1.14}$$

Отношение $d\mathbf{x}'/dt'$ определяет скорость $\mathbf{v}$, так что

$$\Lambda^i{}_0 = v_i \Lambda^0{}_0. \tag{2.1.15}$$

Второе соотношение между $\Lambda^i{}_0$ и $\Lambda^0{}_0$ можно вывести, положив в выражении (2.1.2) индексы $\gamma = \delta = 0$:

$$-1 = \Lambda^\alpha{}_0 \Lambda^\beta{}_0 \eta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1,\,2,\,3} \qquad -(\Lambda^0{}_0)^2. \tag{2.1.16}$$

Решение уравнений (2.1.15) и (2.1.16) имеет вид:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \tag{2.1.17}$$

$$\Lambda^i{}_0 = \gamma v_i, \tag{2.1.18}$$

где

$$\gamma \equiv (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.1.19}$$

---

[1]) «Бустом» в физической литературе называют преобразование Лоренца от системы покоя к движущейся системе координат.— *Прим. ред.*

Другие компоненты $\Lambda^\alpha{}_\beta$ не определяются однозначно, так как если преобразование $\Lambda^\alpha{}_\beta$ переводит частицу из состояния покоя в состояние движения со скоростью $\mathbf{v}$, то это же можно сделать и с помощью преобразования $\Lambda^\alpha{}_\gamma R^\gamma{}_\beta$, где R — произвольное вращение. Удобен следующий выбор $\Lambda^i{}_j$, удовлетворяющий (2.1.2):

$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} - v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \tag{2.1.20}$$

$$\Lambda^0{}_j = \gamma v_j. \tag{2.1.21}$$

Легко видеть, что любое собственное однородное преобразование Лоренца можно выразить как произведение буста $\Lambda(\mathbf{v})$ на матрицу поворота R.

§ 2. Изменение масштаба времени

Хотя преобразования Лоренца были придуманы для того, чтобы объяснить инвариантность скорости света, замена галилеевой относительности релятивистской приводит немедленно к кинематическим следствиям для материальных объектов, движущихся со скоростью, меньшей скорости света. Простейшим и наиболее важным из них является изменение масштаба времени у движущихся часов. Предположим, что относительно данного наблюдателя часы покоятся. Тогда два последовательных временных отсчета разделены пространственно-временным интервалом $d\mathbf{x} = 0$, $dt = \Delta t$, где Δt — стандартная единица времени, задаваемая изготовителем часов. Собственный интервал времени в его системе равен

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = \Delta t.$$

Другой наблюдатель, относительно которого эти же часы движутся со скоростью $\mathbf{v}$, замечает, что два последовательных отсчета времени разделены не только временным интервалом dt', но также и пространственным интервалом $d\mathbf{x}' = \mathbf{v}\, dt'$. Он находит, что в его системе собственный интервал времени определяется следующим образом:

$$d\tau' \equiv (dt'^2 - d\mathbf{x}'^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}\, dt'.$$

Но по предположению оба наблюдателя находятся в инерциальных системах координат, т. е. в системах, связанных преобразованием Лоренца, и при сравнении наблюдений они должны обнаружить, что в согласии с уравнением (2.1.5) $d\tau = d\tau'$. Отсюда следует, что для наблюдателя, относительно которого часы движутся, временные отметки следуют с периодом

$$dt' = \Delta t\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.2.1}$$