Другие компоненты $\Lambda^\alpha{}_\beta$ не определяются однозначно, так как если преобразование $\Lambda^\alpha{}_\beta$ переводит частицу из состояния покоя в состояние движения со скоростью $\mathbf{v}$, то это же можно сделать и с помощью преобразования $\Lambda^\alpha{}_\gamma R^\gamma{}_\beta$, где R — произвольное вращение. Удобен следующий выбор $\Lambda^i{}_j$, удовлетворяющий (2.1.2):

$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} - v_i v_j \frac{(\gamma - 1)}{\mathbf{v}^2}, \qquad (2.1.20)$$

$$\Lambda^0{}_j = \gamma v_j. \qquad (2.1.21)$$

Легко видеть, что любое собственное однородное преобразование Лоренца можно выразить как произведение буста $\Lambda(\mathbf{v})$ на матрицу поворота R.

§ 2. Изменение масштаба времени

Хотя преобразования Лоренца были придуманы для того, чтобы объяснить инвариантность скорости света, замена галилеевой относительности релятивистской приводит немедленно к кинематическим следствиям для материальных объектов, движущихся со скоростью, меньшей скорости света. Простейшим и наиболее важным из них является изменение масштаба времени у движущихся часов. Предположим, что относительно данного наблюдателя часы покоятся. Тогда два последовательных временных отсчета разделены пространственно-временным интервалом $d\mathbf{x} = 0$, $dt = \Delta t$, где Δt — стандартная единица времени, задаваемая изготовителем часов. Собственный интервал времени в его системе равен

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = \Delta t.$$

Другой наблюдатель, относительно которого эти же часы движутся со скоростью $\mathbf{v}$, замечает, что два последовательных отсчета времени разделены не только временным интервалом dt', но также и пространственным интервалом $d\mathbf{x}' = \mathbf{v}\, dt'$. Он находит, что в его системе собственный интервал времени определяется следующим образом:

$$d\tau' \equiv (dt'^2 - d\mathbf{x}'^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}\, dt'.$$

Но по предположению оба наблюдателя находятся в инерциальных системах координат, т. е. в системах, связанных преобразованием Лоренца, и при сравнении наблюдений они должны обнаружить, что в согласии с уравнением (2.1.5) $d\tau = d\tau'$. Отсюда следует, что для наблюдателя, относительно которого часы движутся, временные отметки следуют с периодом

$$dt' = \Delta t\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \qquad (2.2.1)$$

[Соотношение (2.2.1) можно также вывести, используя выражения (2.1.14), (2.1.17) и (2.1.19).] Это соотношение буквально каждый день проверяется в экспериментах по измерению среднего времени жизни быстрых нестабильных частиц, рождающихся в космических лучах и на ускорителях. Частицы, естественно, не дают временных отметок; в этом случае уравнение (2.2.1) говорит о том, что движущаяся частица обладает средним временем жизни, большим, чем покоящаяся, из-за множителя $(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Это находится в полном согласии с экспериментальными значениями, определяемыми с помощью электроники или по длине свободного пробега. Изменение масштаба времени (2.2.1) не следует путать с кажущимися растяжениями и сокращениями времени, известными как *эффект Доплера*. Пусть наши «часы»— движущийся источник света, частота которого $\nu = 1/\Delta t$. Тогда время между излучением двух последовательных волновых фронтов (характеризуемых, например, максимальными значениями какой-либо компоненты электрического поля) задается с помощью (2.2.1) в виде $dt' = \Delta t\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Однако за это время расстояние между наблюдателем и источником света возрастет на величину $v_r\,dt'$, где v_r — компонента $\mathbf{v}$, направленная от наблюдателя к источнику света. Тогда периоды между *прибытиями* волновых фронтов в точку наблюдения равны

$$dt_0 = (1+v_r)\,dt' = (1+v_r)\,(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}\,\Delta t.$$

Следовательно, отношение реально измеряемой частоты света к частоте покоящегося источника света равно

$$\frac{\nu_{\text{набл}}}{\nu} = (1+v_r)^{-1}\,(1-\mathbf{v}^2)^{1/2}. \tag{2.2.2}$$

Если источник света удаляется от наблюдателя, то $v_r > 0$ и обязательно возникает красное смещение. Если источник света движется перпендикулярно направлению на наблюдателя, то $v_r = 0$ и мы будем иметь красное смещение только за счет изменения масштаба времени, обсужденного выше. Если же световой источник движется по направлению к наблюдателю, тогда $v_r = -v$ и (2.2.2) дает фиолетовое смещение, определяемое коэффициентом $(1+v)^{1/2}\,(1-v)^{-1/2}$. Переход от фиолетового к красному смещению возникает в том случае, когда источник движется под некоторым углом к линии источник — наблюдатель, отличным от 0 и 90°.

§ 3. Динамика частицы

Пусть частица движется в поле сил со скоростью, настолько большой, что ньютоновская механика не описывает удовлетворительно ее движение. Предположим, что, как и в случае электродинамики, мы знаем, как вычислить силу $\mathbf{F}$, действующую на нашу