[Соотношение (2.2.1) можно также вывести, используя выражения (2.1.14), (2.1.17) и (2.1.19).] Это соотношение буквально каждый день проверяется в экспериментах по измерению среднего времени жизни быстрых нестабильных частиц, рождающихся в космических лучах и на ускорителях. Частицы, естественно, не дают временных отметок; в этом случае уравнение (2.2.1) говорит о том, что движущаяся частица обладает средним временем жизни, большим, чем покоящаяся, из-за множителя $(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Это находится в полном согласии с экспериментальными значениями, определяемыми с помощью электроники или по длине свободного пробега. Изменение масштаба времени (2.2.1) не следует путать с кажущимися растяжениями и сокращениями времени, известными как *эффект Доплера*. Пусть наши «часы»— движущийся источник света, частота которого $\nu = 1/\Delta t$. Тогда время между излучением двух последовательных волновых фронтов (характеризуемых, например, максимальными значениями какой-либо компоненты электрического поля) задается с помощью (2.2.1) в виде $dt' = \Delta t\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$. Однако за это время расстояние между наблюдателем и источником света возрастет на величину $v_r\,dt'$, где v_r — компонента $\mathbf{v}$, направленная от наблюдателя к источнику света. Тогда периоды между *прибытиями* волновых фронтов в точку наблюдения равны

$$dt_0 = (1 + v_r)\,dt' = (1 + v_r)\,(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}\,\Delta t.$$

Следовательно, отношение реально измеряемой частоты света к частоте покоящегося источника света равно

$$\frac{\nu_{\text{набл}}}{\nu} = (1 + v_r)^{-1}\,(1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}. \tag{2.2.2}$$

Если источник света удаляется от наблюдателя, то $v_r > 0$ и обязательно возникает красное смещение. Если источник света движется перпендикулярно направлению на наблюдателя, то $v_r = 0$ и мы будем иметь красное смещение только за счет изменения масштаба времени, обсужденного выше. Если же световой источник движется по направлению к наблюдателю, тогда $v_r = -v$ и (2.2.2) дает фиолетовое смещение, определяемое коэффициентом $(1 + v)^{1/2}\,(1 - v)^{-1/2}$. Переход от фиолетового к красному смещению возникает в том случае, когда источник движется под некоторым углом к линии источник — наблюдатель, отличным от 0 и 90°.

§ 3. Динамика частицы

Пусть частица движется в поле сил со скоростью, настолько большой, что ньютоновская механика не описывает удовлетворительно ее движение. Предположим, что, как и в случае электродинамики, мы знаем, как вычислить силу $\mathbf{F}$, действующую на нашу частицу, в любой лоренцевой системе, в которой в данный момент частица покоится. Тогда движение нашей частицы можно рассчитать, переходя с помощью преобразования Лоренца к системе, в которой в некоторый момент времени t_0 частица находится в покое, затем вычисляя в момент времени $t_0 + dt$ скорость $d\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt/m$ и снова совершая преобразование Лоренца к системе, в которой скорость равна нулю уже в момент времени $t_0 + dt$ и т. д. К счастью, существует более легкий путь.

Определим *релятивистскую силу* f^α, действующую на частицу с координатой $x^\alpha(\tau)$, следующим образом:

$$f^\alpha = m\,\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}. \tag{2.3.1}$$

Очевидно, что, если f^α известна, можно рассчитать движение нашей частицы. Свяжем f^α с ньютоновской силой, замечая следующие два ее свойства:

А. Если частица находится в данный момент в покое, то собственный временной интервал $d\tau$ равен dt, так что $f^\alpha = F^\alpha$, где F^i — декартовы компоненты нерелятивистской силы $\mathbf{F}$, причем

$$F^0 \equiv 0. \tag{2.3.2}$$

Б. При преобразованиях Лоренца общего вида (2.1.1) дифференциал от координаты преобразуется по закону $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, dx^\beta$, тогда как $d\tau$ — инвариантно. Поэтому из (2.3.1) следует, что правило лоренцева преобразования для величины f^α имеет вид

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta f^\beta. \tag{2.3.3}$$

Любая величина, такая, как dx^α или f^α, преобразующаяся по правилу (2.3.3), называется *4-вектором*.

Предположим теперь, что в некоторый момент времени t_0 частица имеет скорость $\mathbf{v}$, и введем новую систему координат x'^α, определяемую следующим образом:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\, x'^\beta,$$

где $\Lambda(\mathbf{v})$ является «бустом», задаваемым выражениями (2.1.17) — (2.1.21). Буст $\Lambda(\mathbf{v})$ построен так, что переводит частицу из состояния покоя в состояние движения со скоростью $\mathbf{v}$, а поскольку наша частица в системе координат x^α имеет в момент времени t_0 скорость $\mathbf{v}$, то в системе координат x'^α она должна в этот момент времени покоиться. Следовательно, согласно свойству «А», 4-вектор силы f^α в системе координат x'^α должен быть в момент времени t_0 равен нерелятивистской силе F^α. Далее, согласно свойству «Б», сила f^α в первоначальной системе координат равна

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta(\mathbf{v})\, F^\beta. \tag{2.3.4}$$

Менее формальная запись (2.3.4) с учетом того, что $F^0 = 0$, такова:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})}{v^2}, \tag{2.3.5}$$

$$f^0 = \gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{v}\;\mathbf{f}. \tag{2.3.6}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — мгновенное значение скорости.

Теперь, когда известно, как вычислить f^α, можно использовать дифференциальное уравнение (2.3.1), чтобы найти четыре связанные переменные $x^\alpha(\tau)$, а затем, исключив τ, определить $\mathbf{x}(t)$. Однако начальные значения $dx^\alpha/d\tau$ должны быть выбраны так, чтобы $d\tau$ действительно было собственным временем, т. е. чтобы выполнялось условие

$$-1 = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{2.3.7}$$

Отметим, что (2.3.7) будет справедливо при всех τ, если оно справедливо при некотором начальном значении τ, при условии, что производная (2.3.7) равна нулю, т. е.

$$0 = 2\eta_{\alpha\beta}f^\alpha\,\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{2.3.8}$$

То, что это *действительно* верно, можно видеть непосредственно из (2.3.4) либо более элегантным способом, замечая, что правая часть (2.3.8) лоренц-инвариантна, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta}f'^\alpha\,\frac{dx'^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta f^\gamma\,\frac{dx^\delta}{d\tau} = \eta_{\gamma\delta}f^\gamma\,\frac{dx^\delta}{d\tau},$$

и в силу условия (2.3.2) равна нулю в той системе отсчета, в которой частица покоится.

§ 4. Энергия и импульс

Релятивистская форма второго закона Ньютона немедленно приводит к следующему определению 4-вектора энергии-импульса:

$$p^\alpha \equiv m\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{2.4.1}$$

Тогда второй закон Ньютона записывается в виде

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha. \tag{2.4.2}$$

Напомним, что

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}dt,$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$