Менее формальная запись (2.3.4) с учетом того, что $F^0 = 0$, такова:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F} + (\gamma - 1)\,\mathbf{v}\,\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})}{v^2}\,, \tag{2.3.5}$$

$$f^0 = \gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = \mathbf{v}\ \ \mathbf{f}. \tag{2.3.6}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — мгновенное значение скорости.

Теперь, когда известно, как вычислить f^α, можно использовать дифференциальное уравнение (2.3.1), чтобы найти четыре связанные переменные $x^\alpha(\tau)$, а затем, исключив τ, определить $\mathbf{x}(t)$. Однако начальные значения $dx^\alpha/d\tau$ должны быть выбраны так, чтобы $d\tau$ действительно было собственным временем, т. е. чтобы выполнялось условие

$$-1 = \eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx^\beta}{d\tau}\,. \tag{2.3.7}$$

Отметим, что (2.3.7) будет справедливо при всех τ, если оно справедливо при некотором начальном значении τ, при условии, что производная (2.3.7) равна нулю, т. е.

$$0 = 2\eta_{\alpha\beta}f^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau}\,. \tag{2.3.8}$$

То, что это *действительно* верно, можно видеть непосредственно из (2.3.4) либо более элегантным способом, замечая, что правая часть (2.3.8) лоренц-инвариантна, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta}f'^\alpha\frac{dx'^\beta}{d\tau} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\gamma\Lambda^\beta{}_\delta f^\gamma\frac{dx^\delta}{d\tau} = \eta_{\gamma\delta}f^\gamma\frac{dx^\delta}{d\tau}\,,$$

и в силу условия (2.3.2) равна нулю в той системе отсчета, в которой частица покоится.

§ 4. Энергия и импульс

Релятивистская форма второго закона Ньютона немедленно приводит к следующему определению 4-вектора энергии-импульса:

$$p^\alpha \equiv m\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,. \tag{2.4.1}$$

Тогда второй закон Ньютона записывается в виде

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = f^\alpha. \tag{2.4.2}$$

Напомним, что

$$d\tau \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2} = (1 - \mathbf{v}^2)^{1/2}dt,$$

где

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}\,.$$

Тогда пространственные компоненты p образуют вектор импульса

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \tag{2.4.3}$$

а временная компонента дает энергию

$$\mathrm{p}^0 \equiv E = m\gamma, \tag{2.4.4}$$

где

$$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}. \tag{2.4.5}$$

Из этих определений следует, что при малых $\mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + 0(\mathbf{v}^3), \tag{2.4.6}$$

$$E = m + \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + 0(\mathbf{v}^4) \tag{2.4.7}$$

в соответствии с нерелятивистскими формулами, за исключением слагаемого m в E. (Напомним, что в наших единицах 1 с равна $3 \cdot 10^{10}$ см, а потому 1 г равен $9 \cdot 10^{20}$ эрг.) Иногда коэффициент $m\gamma$ называют релятивистской массой и обозначают $\tilde{m}$, так что $\mathbf{p} = \tilde{m}\mathbf{v}$. Мы не будем здесь придерживаться таких обозначений; далее под m мы будем подразумевать постоянную «массу».

Почему $\mathbf{p}$ и E называют релятивистскими импульсом и энергией? Эти названия можно приписать чему угодно, но, чтобы понятия импульса и энергии были полезны, их нужно отнести к *сохраняющимся* величинам. Существенной особенностью определенных выше $\mathbf{p}$ и E является то, что если один наблюдатель отмечает сохранение этих величин в какой-нибудь реакции, то это же может сказать и любой другой наблюдатель в системе, связанной с первой преобразованием Лоренца. Заметим, что dx^α есть 4-вектор, в то время как m и $d\tau$ — инварианты. Поэтому для любой отдельной частицы p^α является 4-вектором, т. е. при преобразованиях (2.1.1) импульс трансформируется следующим образом:

$$p'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta p^\beta,$$

поскольку Λ зависит только от выполняемого преобразования Лоренца, то в любой реакции изменение суммы импульсов p^α всех частиц есть также 4-вектор, т. е.

$$\Delta \sum_n p'^\alpha_n = \Lambda^\alpha{}_\beta \Delta \sum_n p^\beta_n.$$

(Суммирование здесь производится по всем частицам, а символ Δ означает разность между импульсами начального и конечного состояний.)

Сохранение $\mathbf{p}$ и E в первоначальной инерциальной системе означает, что $\Delta \sum_n p^\beta_n$ исчезает, так что в любой системе координат связанной с первой преобразованием Лоренца, величины $\mathbf{p}$ и E также будут сохраняться, т. е. $\Delta \sum_n p_n^\alpha$ будет обращаться в нуль.

Не станем показывать здесь, что $\mathbf{p}$ и E являются *единственными* функциями скорости, сохранение которых лоренц-инвариантно [6]. Однако стоит обратить особое внимание на тот факт, что E должно сохраняться, если сохраняется $\mathbf{p}$. Действительно, пусть в двух различных системах координат, связанных преобразованием Лоренца, импульс сохраняется, т. е. справедливы следующие соотношения:

$$\Delta \sum_n \mathbf{p}_n = 0, \qquad \Delta \sum_n \mathbf{p}'_n = 0.$$

Так как $\Delta \sum_n p_n^\alpha$ есть 4-вектор, имеем

$$\Delta \sum_n p_n'^i = \Lambda^i{}_\beta \Delta \sum_n p_n^\beta$$

и, учитывая сохранение импульса в обеих системах координат, получаем

$$0 = \Lambda^i{}_0 \Delta \sum_n p_n^0.$$

Но Λ^i_0 с необходимостью отлично от нуля, поэтому $p^0 = E$ сохраняется.

При нулевой скорости энергия E имеет конечное значение m. По этой причине мы будем иногда называть величину $E - m$ «кинетической энергией», поскольку для малых $\mathbf{v}$ она приближенно равна $^1/_2 m\mathbf{v}^2$. Если в реакции сохраняется полная масса (как в случае упругого рассеяния), то кинетическая энергия сохраняется. Но если какое-то количество массы уничтожается (как в радиоактивном распаде, при делении или синтезе), то высвобождается большое количество кинетической энергии, важность чего хорошо известна.

Из уравнений (2.4.3) и (2.4.4) можно исключить скорость, что дает соотношение между энергией и импульсом:

$$E(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}. \qquad (2.4.8)$$

То же самое можно вывести, замечая, что из (2.4.1) и определения $d\tau$ следует

$$\eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = -m^2.$$

Для фотона или нейтрино нужно положить $\mathbf{v}^2 = 1$ и $m = 0$; отсюда немедленно следуют выражения (2.4.3) и (2.4.4), а их отношение приводит к связи, справедливой для всех частиц:

$$\frac{\mathbf{p}}{E} = \mathbf{v}. \qquad (2.4.10)$$

Отметим, что для $m = 0$ формула (2.4.8) сводится к равенству $E = |\mathbf{p}|$, как и должно быть для безмассовых частиц, поскольку их скорость $\mathbf{v}$ — единичный вектор.

§ 5. Векторы и тензоры

Теперь мы переходим к электродинамике и релятивистской гидродинамике, но для удобства перехода сделаем отступление и введем сперва систему обозначений, которая сделает лоренц-преобразования физических величин более прозрачными. В гл. 4 эта система будет распространена на тензорный анализ, чтобы включить и общие координатные преобразования, но фактически для этого почти не потребуется изменений.

Мы уже ввели термин «4-вектор» для любой величины, такой, как dx^α, f^α или p^α, которая преобразуется следующим образом:

$$V^\alpha \to V^{\alpha'} = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta, \tag{2.5.1}$$

при замене системы координат:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x_\beta. \tag{2.5.2}$$

Точнее будет назвать такой вектор V^α *контравариантным* 4-вектором, чтобы отличить его от *ковариантного* 4-вектора U_α, который определяется как величина, преобразующаяся по следующему правилу

$$U_\alpha \to U'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U_\beta, \tag{2.5.3}$$

где

$$\Lambda_\alpha{}^\beta \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\Lambda^\gamma{}_\delta. \tag{2.5.4}$$

Матрица $\eta^{\beta\delta}$, введенная здесь, численно та же, что и $\eta_{\beta\delta}$, т. е.

$$\eta^{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta}, \tag{2.5.5}$$

но мы записываем ее с поднятыми вверх индексами в соответствии с нашим условным обозначением операции суммирования. Отметим, что

$$\eta^{\beta\delta}\eta_{\alpha\delta} = \delta^\beta{}_\alpha \equiv \begin{cases} +1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

а потому $\Lambda_\alpha{}^\beta$ — матрица, обратная $\Lambda^\beta{}_\alpha$, т. е.

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma\Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta}\eta^{\gamma\varepsilon}\Lambda^\delta{}_\varepsilon\Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\varepsilon\beta}\eta^{\gamma\varepsilon} = \delta^\gamma{}_\beta. \tag{2.5.7}$$

Отсюда следует, что скалярное произведение контравариантного и ковариантного 4-векторов есть инвариант, т. е.

$$U'_\alpha V'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma\Lambda^\alpha{}_\beta U_\gamma V^\beta = U_\beta V^\beta. \tag{2.5.8}$$