Отметим, что для $m = 0$ формула (2.4.8) сводится к равенству $E = |\mathbf{p}|$, как и должно быть для безмассовых частиц, поскольку их скорость $\mathbf{v}$ — единичный вектор.

§ 5. Векторы и тензоры

Теперь мы переходим к электродинамике и релятивистской гидродинамике, но для удобства перехода сделаем отступление и введем сперва систему обозначений, которая сделает лоренц-преобразования физических величин более прозрачными. В гл. 4 эта система будет распространена на тензорный анализ, чтобы включить и общие координатные преобразования, но фактически для этого почти не потребуется изменений.

Мы уже ввели термин «4-вектор» для любой величины, такой, как dx^α, f^α или p^α, которая преобразуется следующим образом:

$$V^\alpha \to V^{\alpha\prime} = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta, \tag{2.5.1}$$

при замене системы координат:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x_\beta. \tag{2.5.2}$$

Точнее будет назвать такой вектор V^α *контравариантным* 4-вектором, чтобы отличить его от *ковариантного* 4-вектора U_α, который определяется как величина, преобразующаяся по следующему правилу

$$U_\alpha \to U'_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U_\beta, \tag{2.5.3}$$

где

$$\Lambda_\alpha{}^\beta \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\Lambda^\gamma{}_\delta. \tag{2.5.4}$$

Матрица $\eta^{\beta\delta}$, введенная здесь, численно та же, что и $\eta_{\beta\delta}$, т. е.

$$\eta^{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta}, \tag{2.5.5}$$

но мы записываем ее с поднятыми вверх индексами в соответствии с нашим условным обозначением операции суммирования. Отметим, что

$$\eta^{\beta\delta}\eta_{\alpha\delta} = \delta^\beta{}_\alpha \equiv \begin{cases} +1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

а потому $\Lambda_\alpha{}^\beta$ — матрица, обратная $\Lambda^\beta{}_\alpha$, т. е.

$$\Lambda_\alpha{}^\gamma\Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\alpha\delta}\eta^{\gamma\varepsilon}\Lambda^\delta{}_\varepsilon\Lambda^\alpha{}_\beta = \eta_{\varepsilon\beta}\eta^{\gamma\varepsilon} = \delta^\gamma{}_\beta. \tag{2.5.7}$$

Отсюда следует, что скалярное произведение контравариантного и ковариантного 4-векторов есть инвариант, т. е.

$$U'_\alpha V'^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\gamma\Lambda^\alpha{}_\beta U_\gamma V^\beta = U_\beta V^\beta. \tag{2.5.8}$$

Каждому контравариантному 4-вектору V^α соответствует ковариантный 4-вектор

$$V_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} V^\beta, \tag{2.5.9}$$

а каждому ковариантному U_α соответствует контравариантный

$$U^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} U_\beta. \tag{2.5.10}$$

Заметим, что поднимание индекса у V_α дает просто V^α, а опускание индекса у U^α переводит его обратно в U_α, т. е.

$$\eta^{\alpha\beta} V_\beta = \eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} V^\gamma = V^\alpha,$$

$$\eta_{\alpha\beta} U^\beta = \eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\gamma} U_\gamma = U_\alpha.$$

Отметим также, что в соответствии с (2.5.3) величина (2.5.9) в самом деле является ковариантным вектором, поскольку

$$V'_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V'^\beta = \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\gamma V^\gamma = \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \Lambda^\beta{}_\gamma V_\delta = \Lambda_\alpha{}^\delta V_\delta.$$

Аналогично величина (2.5.10) действительно является контравариантным вектором.

Хотя любой вектор можно записать, как в ко-, так и в контравариантной форме, существуют некоторые векторы, такие, как dx^α, которые выглядят более естественно в контравариантном виде. Другие же, напротив, более естественны как коварианты. Примером последнего может служить градиент $\partial/\partial x^\alpha$, подчиняющийся трансформационному правилу:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}.$$

Умножая (2.5.1) на $\Lambda_\alpha{}^\gamma$, получаем

$$x^\gamma = \Lambda_\alpha{}^\gamma x'^\alpha,$$

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta,$$

а потому градиент ковариантен:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \Lambda_\alpha{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{2.5.11}$$

Отсюда следует, во-первых, что дивергенция контравариантного вектора $\partial V^\alpha/\partial x^\alpha$ есть инвариант и, во-вторых, что скалярное произведение $\partial/\partial x^\alpha$ самого на себя, называемое оператором Даламбера,

$$\Box^2 = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.5.12}$$

есть также инвариант.

Многие физические величины не являются ни скалярами, ни векторами, а являются более сложными объектами, которые называются тензорами. Тензор имеет несколько контравариантных и (или) ковариантных индексов с соответствующими свойствами лоренц-преобразований по ним, например

$$T^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \to T'^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}{}_{\delta}\Lambda_{\alpha}{}^{\varepsilon}\Lambda_{\beta}{}^{\zeta}T^{\delta}{}_{\varepsilon\zeta}.$$

Контравариантный или ковариантный вектор можно рассматривать как тензор, имеющий один индекс, а скаляр — как тензор без индексов. Существует несколько способов образования тензоров из других тензоров:

А. Линейная комбинация. Линейная комбинация тензоров с одними и теми же верхними и нижними индексами есть тензор с теми же индексами. Например, если R^{α}_{β} и S^{α}_{β} — тензоры, а a и b — скаляры, и мы зададим T^{α}_{β} в виде

$$T^{\alpha}{}_{\beta} \equiv aR^{\alpha}{}_{\beta} + bS^{\alpha}{}_{\beta},$$

то $T^{\alpha}{}_{\beta}$ есть тензор, т. е.

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} \equiv aR'^{\alpha}{}_{\beta} + bS'^{\alpha}{}_{\beta} = a\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}R^{\gamma}{}_{\delta} + b\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}S^{\gamma}{}_{\delta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}T^{\gamma}{}_{\delta}.$$

Б. Прямое произведение. Произведение компонент двух тензоров есть тензор, верхние и нижние индексы которого состоят соответственно из всех верхних и нижних индексов двух исходных тензоров. Например, если $A^{\alpha}{}_{\beta}$ и B^{γ} являются тензорами

$$T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} \equiv A^{\alpha}{}_{\beta}B^{\gamma},$$

то $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma}$ есть тензор, т. е.

$$T'^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = A'^{\alpha}{}_{\beta}B'^{\gamma} = \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda_{\beta}{}^{\varepsilon}\Lambda^{\gamma}{}_{\zeta}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta}.$$

В. Свертка. Приравняв какие-нибудь верхние и нижние индексы попарно и произведя суммирование по их значениям 0, 1, 2, 3, получим тензор, у которого этих двух индексов уже не будет. Например, если $T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}$ — тензор и

$$T^{\alpha\gamma} \equiv T^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta},$$

то $T^{\alpha\gamma}$ тоже является тензором, т. е.

$$\begin{aligned} T'^{\alpha\gamma} &\equiv T'^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\beta} = \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda_{\beta}{}^{\varepsilon}\Lambda^{\gamma}{}_{\zeta}\Lambda^{\beta}{}_{\varkappa}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta\varkappa} = \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{\zeta}\delta^{\varepsilon}{}_{\varkappa}T^{\delta}{}_{\varepsilon}{}^{\zeta\varkappa} = \\ &= \Lambda^{\alpha}{}_{\delta}\Lambda^{\gamma}{}_{\zeta}T^{\delta\zeta}. \end{aligned}$$

Г. Дифференцирование. Производная $\partial/\partial x^\alpha$ любого тензора есть тензор, имеющий один дополнительный нижний индекс α. Например, если $T^{\beta\gamma}$ — тензор и

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\beta\gamma},$$

то $T_\alpha{}^{\beta\gamma}$ также является тензором, поскольку

$$T'_\alpha{}^{\beta\gamma} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} T'^{\beta\gamma} =$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \frac{\partial}{\partial x^\delta} \Lambda^\beta{}_\varepsilon \Lambda^\gamma{}_\zeta T^{\varepsilon\zeta} =$$

$$= \Lambda_\alpha{}^\delta \Lambda^\beta{}_\varepsilon \Lambda^\gamma{}_\zeta T_\delta{}^{\varepsilon\zeta};$$

отметим, что порядок следования индексов существен даже в расстановке верхних и нижних индексов. Например, $T_\alpha{}^{\beta\gamma}$ может и не совпадать с $T^\beta{}_\alpha{}^\gamma$.

Кроме скаляров, еще три особых тензора обладают тем свойством, что компоненты их одинаковы во всех координатных системах:

1. Тензор Минковского. Из определения преобразования Лоренца немедленно следует, что $\eta_{\alpha\beta}$ есть ковариантный тензор, т. е.

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta \eta_{\gamma\delta}.$$

Умножая это соотношение на $\eta^{\alpha\varepsilon}\eta^{\beta\zeta}$ и используя (2.5.6) и (2.5.4), находим, что

$$\eta^{\varepsilon\zeta} = \eta^{\gamma\varkappa}\eta^{\delta\lambda}\Lambda_\varkappa{}^\varepsilon \Lambda_\lambda{}^\zeta \eta_{\gamma\delta} =$$

$$= \eta^{\varkappa\lambda}\Lambda_\varkappa{}^\varepsilon \Lambda_\lambda{}^\zeta,$$

а потому $\eta^{\alpha\beta}$ является контравариантным тензором. (Напомним, что $\eta_{\alpha\beta}$ и $\eta^{\alpha\beta}$ численно совпадают, следовательно, это матрица, которая может быть и ковариантной и контравариантной.) Можно построить смешанный тензор, опуская один индекс у $\eta^{\alpha\beta}$ или поднимая один индекс у $\eta_{\alpha\beta}$; это даст нам символ Кронекера

$$\delta^\alpha{}_\beta = \eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta}.$$

То, что это действительно тензор, следует из правил Б и В и из того факта, что $\eta^{\alpha\gamma}$ и $\eta_{\gamma\beta}$ — тензоры.

2. Тензор Леви-Чивита. Это величина $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, определяемая следующим образом:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{если индексы } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ составляют четную перестановку } 0123, \\ -1, & \text{если индексы } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ составляют нечетную перестановку } 0123, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.5.13}$$

Заметим, что справедливо соотношение

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\varepsilon}\Lambda^{\beta}{}_{\zeta}\Lambda^{\gamma}{}_{\varkappa}\Lambda^{\delta}{}_{\lambda}\varepsilon^{\varepsilon\zeta\varkappa\lambda} \sim \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

так как левая часть его должна быть нечетной при любой однократной перестановке индексов $\alpha\beta\gamma\delta$. Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности, положим $\alpha\beta\gamma\delta = 0123$. Тогда левая часть рассматриваемого соотношения есть просто детерминант Λ, который при собственных преобразованиях Лоренца равен единице (см. § 1 гл. 2). Таким образом, коэффициент пропорциональности равен единице, т. е.

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\varepsilon}\Lambda^{\beta}{}_{\zeta}\Lambda^{\gamma}{}_{\varkappa}\Lambda^{\delta}{}_{\lambda}\varepsilon^{\varepsilon\zeta\varkappa\lambda} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{2.5.14}$$

и, следовательно, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *действительно* тензор.

3. Нулевой тензор. Такой тензор можно определить как объект с произвольным числом верхних и нижних индексов, у которого все компоненты равны нулю.

Поскольку $\eta^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta}$ являются тензорами, их можно использовать, чтобы поднимать или опускать индексы у произвольного тензора; из правил Б и В вытекает, что это дает нам новый тензор, у которого становится на один верхний или нижний индекс больше и соответственно на один нижний или верхний индекс меньше. Например, если $T_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор, то таким новым тензором будет

$$T_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\gamma} \equiv \eta^{\delta\beta}T_{\alpha\beta\gamma}.$$

В частности, у тензора Леви-Чивита $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно опустить вниз некоторые или все индексы. Опустив все индексы, получаем то же численное значение, но со знаком минус:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{2.5.15}$$

Польза этого алгебраического подхода заключается в том, что мы можем по виду уравнения моментально определить, является ли оно лоренц-инвариантным. Фундаментальная теорема утверждает, *что если два тензора с одинаковыми верхними и нижними индексами равны в одной системе координат, то они равны в любой другой системе координат, связанной с первой преобразованием*

Лоренца. Например, если $T^{\alpha}_{\iota\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta}$, то

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}T^{\gamma}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}S^{\gamma}{}_{\delta} = S'^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Частный случай этой теоремы — *утверждение, что нулевой тензор лоренц-инвариантен.* Формализм, приведенный в общих чертах в этом параграфе, есть не что иное, как описание представлений однородной группы Лоренца. Мы займемся исследованием этих представлений в более общем виде в § 12 гл. 2.

§ 6. Токи и плотности

Пусть у нас есть система частиц с зарядами e_n, а их положение задается радиусами-векторами $\mathbf{x}_n(t)$. Ток и плотность зарядов, как обычно, определим следующим образом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt}, \tag{2.6.1}$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.6.2}$$

Здесь δ^3 — дельта-функция Дирака, определяемая с помощью условия, что для любой гладкой функции $f(x)$ должно выполняться условие

$$\int d^3x f(\mathbf{x})\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}).$$

Мы можем объединить $\mathbf{J}$ и ε в 4-вектор J^{α}, положив

$$J^0 \equiv \varepsilon, \tag{2.6.3}$$

т. е.

$$J^{\alpha}(x) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^{\alpha}(t)}{dt}. \tag{2.6.4}$$

Для того чтобы показать, что это действительно 4-вектор, зададим $x_n^0(t) = t$ и запишем (2.6.4) в виде

$$J^{\alpha}(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^{\alpha}(t')}{dt'}.$$

Дифференциалы dt' сокращаются, поэтому их можно заменить инвариантами $d\tau$:

$$J^{\alpha}(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^{\alpha}(\tau)}{d\tau}. \tag{2.6.5}$$

Но $\delta^4(x - x_n(\tau))$ есть скаляр (так как $\operatorname{Det}\Lambda = 1$), а dx_n^{α} — 4-вектор, следовательно, и J^{α} является 4-вектором.