Лоренца. Например, если $T^{\alpha}_{\iota\beta} = S^{\alpha}{}_{\beta}$, то

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}T^{\gamma}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda_{\beta}{}^{\delta}S^{\gamma}{}_{\delta} = S'^{\alpha}{}_{\beta}.$$

Частный случай этой теоремы — *утверждение, что нулевой тензор лоренц-инвариантен.* Формализм, приведенный в общих чертах в этом параграфе, есть не что иное, как описание представлений однородной группы Лоренца. Мы займемся исследованием этих представлений в более общем виде в § 12 гл. 2.

§ 6. Токи и плотности

Пусть у нас есть система частиц с зарядами e_n, а их положение задается радиусами-векторами $\mathbf{x}_n(t)$. Ток и плотность зарядов, как обычно, определим следующим образом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt}, \tag{2.6.1}$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.6.2}$$

Здесь δ^3 — дельта-функция Дирака, определяемая с помощью условия, что для любой гладкой функции $f(x)$ должно выполняться условие

$$\int d^3x f(\mathbf{x})\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}).$$

Мы можем объединить $\mathbf{J}$ и ε в 4-вектор J^{α}, положив

$$J^0 \equiv \varepsilon, \tag{2.6.3}$$

т. е.

$$J^{\alpha}(x) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^{\alpha}(t)}{dt}. \tag{2.6.4}$$

Для того чтобы показать, что это действительно 4-вектор, зададим $x_n^0(t) = t$ и запишем (2.6.4) в виде

$$J^{\alpha}(x) = \int dt' \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^{\alpha}(t')}{dt'}.$$

Дифференциалы dt' сокращаются, поэтому их можно заменить инвариантами $d\tau$:

$$J^{\alpha}(x) = \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^{\alpha}(\tau)}{d\tau}. \tag{2.6.5}$$

Но $\delta^4(x - x_n(\tau))$ есть скаляр (так как $\operatorname{Det}\Lambda = 1$), а dx_n^{α} — 4-вектор, следовательно, и J^{α} является 4-вектором.

Отметим также, что

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{\partial x_n^i(t)}{dt} =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{x}, t),$$

или в четырехмерной записи

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) = 0. \tag{2.6.6}$$

Лоренц-инвариантность этого уравнения очевидна. Если ток $J^\alpha(x)$ удовлетворяет инвариантному закону сохранения (2.6.6), можно построить полный заряд

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x). \tag{2.6.7}$$

Эта величина не зависит от времени, так как (2.6.6) и теорема Гаусса приводят к результату

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} J^0(x) = -\int d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}(x) = 0.$$

Если $J^\alpha(x)$ есть 4-вектор, то Q является не только константой, но и скаляром. Для того чтобы убедиться в этом, запишем Q в виде

$$Q = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(n_\beta x^\beta), \tag{2.6.8}$$

где θ — функция Хэвисайда (ступенька):

$$\theta(s) = \begin{cases} 1 & s > 0, \\ 0 & s < 0, \end{cases}$$

а n_λ задается следующим образом:

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv 0, \qquad n_0 \equiv +1.$$

Тогда преобразование Лоренца величины Q сводится, очевидно, просто к замене в ней $n \to n'$:

$$Q' = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(n'_\beta x^\beta),$$

$$n'_\beta \equiv \Lambda_\beta{}^\gamma n_\gamma.$$

Если же использовать (2.6.6), изменение Q выражается так:

$$Q' - Q = \int d^4x \partial_\alpha [J^\alpha(x) \{\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)\}].$$

Можно считать, что ток $J^\alpha(x)$ исчезает при $|\mathbf{x}| \to \infty$ и фиксированном t, в то время как функция $\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)$ обращается в нуль, если $|t| \to \infty$, а $|\mathbf{x}|$ фиксировано. Следовательно, можно воспользоваться четырехмерной теоремой Гаусса и показать, что $Q' - Q = 0$, т. е. Q есть скаляр. [Для плотности тока J^0, определяемой с помощью (2.6.2), заряд (2.6.7) задается в виде

$$Q = \sum_n e_n$$

и является, конечно, скалярной константой. Однако, если иметь дело с распределениями заряда и тока протяженных частиц, важно отчетливо понимать, что (2.6.7) вводит не зависящий от времени скаляр для *любого* сохраняющегося 4-вектора J^α.]

§ 7. Электродинамика

Уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, создаваемых заданной плотностью заряда ε и плотностью тока $\mathbf{J}$, имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon, \tag{2.7.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \tag{2.7.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.7.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.7.4}$$

Для того чтобы исследовать свойства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при лоренц-преобразованиях, введем матрицу $F^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} F^{12} = B_3, \qquad F^{23} = B_1, \qquad F^{31} = B_2 \\ F^{01} = E_1, \qquad F^{02} = E_2, \qquad F^{03} = E_3, \\ F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}. \end{gathered} \tag{2.7.5}$$

Тогда (2.7.1) и (2.7.2) можно переписать в виде (напомним, что $J^0 \equiv \varepsilon$)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{2.7.6}$$

в то время как (2.7.3) и (2.7.4) запишутся так:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0, \tag{2.7.7}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — символ Леви-Чивита, определенный в § 5 гл. 2, а $F_{\gamma\delta}$ — ковариант, определяемый обычным образом:

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta}F^{\alpha\beta}.$$