Можно считать, что ток $J^\alpha(x)$ исчезает при $|\mathbf{x}| \to \infty$ и фиксированном t, в то время как функция $\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)$ обращается в нуль, если $|t| \to \infty$, а $|\mathbf{x}|$ фиксировано. Следовательно, можно воспользоваться четырехмерной теоремой Гаусса и показать, что $Q' - Q = 0$, т. е. Q есть скаляр. [Для плотности тока J^0, определяемой с помощью (2.6.2), заряд (2.6.7) задается в виде

$$Q = \sum_n e_n$$

и является, конечно, скалярной константой. Однако, если иметь дело с распределениями заряда и тока протяженных частиц, важно отчетливо понимать, что (2.6.7) вводит не зависящий от времени скаляр для *любого* сохраняющегося 4-вектора J^α.]

§ 7. Электродинамика

Уравнения Максвелла для электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, создаваемых заданной плотностью заряда ε и плотностью тока $\mathbf{J}$, имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon, \tag{2.7.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \tag{2.7.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.7.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.7.4}$$

Для того чтобы исследовать свойства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при лоренц-преобразованиях, введем матрицу $F^{\alpha\beta}$ следующим образом:

$$\begin{matrix} F^{12} = B_3, & F^{23} = B_1, & F^{31} = B_2 \\ F^{01} = E_1, & F^{02} = E_2, & F^{03} = E_3, \end{matrix} \tag{2.7.5}$$

$$F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}.$$

Тогда (2.7.1) и (2.7.2) можно переписать в виде (напомним, что $J^0 \equiv \varepsilon$)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \tag{2.7.6}$$

в то время как (2.7.3) и (2.7.4) запишутся так:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0, \tag{2.7.7}$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — символ Леви-Чивита, определенный в § 5 гл. 2, а $F_{\gamma\delta}$ — ковариант, определяемый обычным образом:

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha}\eta_{\delta\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Так как J^α — 4-вектор, можно сделать вывод, что $F^{\alpha\beta}$ есть тензор:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta F^{\gamma\delta}. \tag{2.7.8}$$

Действительно, если $F^{\alpha\beta}$ является решением (2.7.6) и (2.7.7), то (2.7.8) будет решением в любой лоренц-преобразованной системе координат. Электромагнитная сила, действующая на заряженную частицу, определяется так:

$$f^\alpha = e\eta_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = eF^\alpha{}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \tag{2.7.9}$$

В том, что эта формула правильная, можно убедиться, повторяя аргументы, приведенные в § 3. Выражение (2.7.9) справедливо в той системе отсчета, в которой покоится частица, так как в этой системе $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, $f^0 = 0$. Оно преобразуется как 4-вектор, а поэтому справедливо для всех скоростей. Отметим, кстати, что (2.7.9) и (2.4.2) дают

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\,[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

и, следовательно, формула для магнитной силы возникает как следствие специальной теории относительности.

Существует удобная альтернативная форма однородного урав нения (2.7.7), а именно

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.7.10}$$

Отметим, что, если все индексы α, β, γ различны, уравнение (2.7.10) совпадает с (2.7.7). Например, при $\alpha = 0$ уравнение (2.7.7) дает тот же результат, что и уравнение (2.7.10) при $\alpha\beta\gamma = 1\ 2\ 3$. Далее при двух равных индексах уравнение (2.7.10) обращается в тождество, например, при $\beta = \gamma$ (2.7.10) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\beta\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{(без суммирования)}$$

и выполняется тождественно, поскольку $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$. Уравнение (2.7.7) позволяет представить $F_{\gamma\delta}$ как ротор 4-вектора A_γ:

$$F_{\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} A_\delta - \frac{\partial}{\partial x^\delta} A_\gamma \tag{2.7.11}$$

(см. § 11 гл. 4).

Можно ввести в A_γ член $\partial_\gamma \varphi$, не изменяя $F_{\gamma\delta}$, так как A_γ может быть определено таким образом, чтобы

$$\partial^\alpha A_\alpha = 0. \tag{2.7.12}$$

Если учесть (2.7.11) и (2.7.12), то остальные уравнения Максвелла сводятся к уравнению

$$\Box^2 A_\alpha = -J_\alpha. \tag{2.7.13}$$