§ 8. Тензор энергии-импульса

В § 5 мы ввели плотность электрического заряда ε и тока $\mathbf{J}$. Сейчас аналогичным образом мы дадим определение заряда и тока 4-вектора энергии-импульса p^α. Рассмотрим сначала систему n частиц с 4-вектором энергии-импульса $p_n^\alpha(t)$. Плотность p^α определяется следующим образом:

$$T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n p_n^\alpha(t)\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \tag{2.8.1}$$

а ток задается в виде

$$T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.8.2}$$

Эти два определения можно объединить одной формулой:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)), \tag{2.8.3}$$

где $x_n^0(t) \equiv t$. Отметим, что из (2.4.10) следует

$$p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt},$$

поэтому (2.8.3) можно записать в виде

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \tag{2.8.4}$$

Отсюда видно, что тензор $T^{\alpha\beta}$ *симметричен*:

$$T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x). \tag{2.8.5}$$

По аналогии с (2.6.5) мы можем переписать (2.8.3) еще и так:

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n d\tau p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{d\tau} \delta^4(x - x_n(\tau)), \tag{2.8.5a}$$

откуда видно, что $T^{\alpha\beta}$ действительно *тензор*, т. е. при преобразованиях Лоренца (2.1.1) ведет себя следующим образом:

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma \Lambda^\beta{}_\delta T^{\gamma\delta}.$$

Чтобы установить закон сохранения для $T^{\alpha\beta}$, потребуются несколько бо́льшие усилия. Возвращаясь к (2.8.1) и (2.8.2), мы

видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i} T^{\alpha i}(\mathbf{x}, t) = -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\sum_n p_n^\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t) + \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} = G^\alpha, \tag{2.8.6}$$

где G^α — *плотность силы*:

$$G^\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} = \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha(t).$$

Если частицы свободны, то p_n^α будет постоянным, а $T^{\alpha\beta}$ сохраняется, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0. \tag{2.8.7}$$

Этот же закон справедлив, если частицы взаимодействуют только при столкновениях, строго локализованных в пространстве. В этом случае (2.8.6) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = \sum_c \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c(t)) \frac{d}{dt} \sum_{n \in c} p_n^\alpha(t),$$

где $\mathbf{x}_c(t)$ — координаты c-го столкновения, происходящего в момент времени t, а символ $n \in c$ означает, что мы суммируем только по частицам, участвующим в c-м столкновении. Но при каждом столкновении импульс сохраняется, поэтому величина $\sum_{n \in c} p_n^\alpha(t)$ не зависит от времени, и, следовательно, выполняется закон сохранения (2.8.7).

Тензор энергии-импульса (2.8.3) не сохраняется, если частицы являются объектами, испытывающими действие сил на расстоянии. Рассмотрим, например, газ, состоящий из заряженных частиц с зарядами e_n. Тогда (2.8.6), (2.4.1) и (2.7.9) дают

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n e_n F^\alpha{}_\gamma(x) \frac{dx_n^\gamma}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)),$$

и, если использовать (2.6.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = F^\alpha{}_\gamma(x) J^\gamma(x). \tag{2.8.8}$$

Такой тензор не сохраняется, но можно построить сохраняющийся тензор, добавив чисто электромагнитный член, имеющий вид:

$$T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} \equiv F^\alpha{}_\gamma F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}. \tag{2.8.9}$$

Следовательно, плотности электромагнитной энергии и импульса задаются следующим образом:

$$T^{00}_{\text{эм}} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \qquad T^{i0}_{\text{эм}} = (\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i. \tag{2.8.10}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{\beta\gamma} + F^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^\alpha{}_\gamma - \frac{1}{2} F_{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\gamma\delta}.$$

[Здесь $\partial/\partial x_\alpha = \eta^{\alpha\beta}(\partial/\partial x^\beta)$.] Небольшая перегруппировка индексов приводит к следующему выражению:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = F^\alpha{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\beta} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} F_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} T^{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F^{\alpha\beta}\right).$$

Используя уравнения Максвелла (2.7.6) и (2.7.10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}_{\text{эм}} = -F^\alpha{}_\gamma J^\gamma. \tag{2.8.11}$$

Сравнивая теперь (2.8.8) с (2.8.11), приходим к следующему переопределению тензора энергии-импульса:

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) + T^{\alpha\beta}_{\text{эм}}. \tag{2.8.12}$$

Этот тензор по-прежнему симметричен, но теперь он сохраняется:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.8.13}$$

Можно прибавлять к тензору $T^{\alpha\beta}$ все новые и новые члены, вводя другие поля, но оставляя тензор $T^{\alpha\beta}$ сохраняющимся. Систематический метод построения таких членов описан в гл. 12.

Интеграл от плотности заряда J^0 есть как раз полный заряд, а интеграл от плотности $T^{\alpha 0}$ импульса p^α — полный импульс $p^\alpha_{\text{полн}}$:

$$p^\alpha_{\text{полн}} = \int d^3x T^{\alpha 0}(\mathbf{x}, t). \tag{2.8.14}$$

То, что это сохраняющийся 4-вектор, можно показать таким же образом, как мы показали в § 6, что полный заряд (2.6.7) является сохраняющимся скаляром.